

# Florestas Racionais e Círculos Tangenciais

Marisa da Costa Cardoso Oliveira

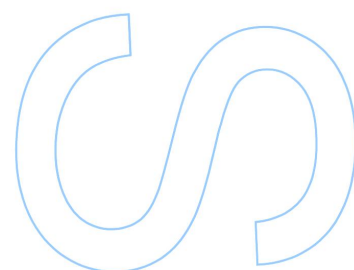
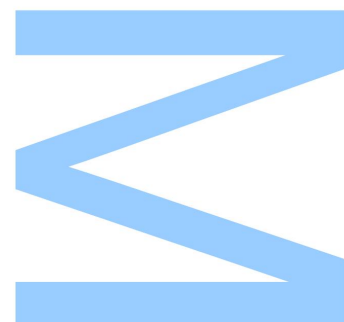
Mestrado em Matemática para Professores

Departamento de Matemática

2014

**Orientador**

Samuel António de Sousa Dias Lopes, Professor Auxiliar, FCUP

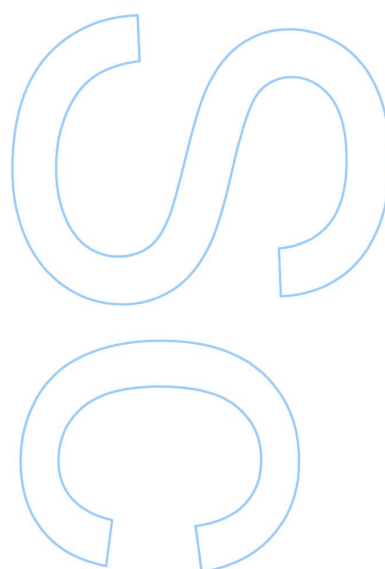
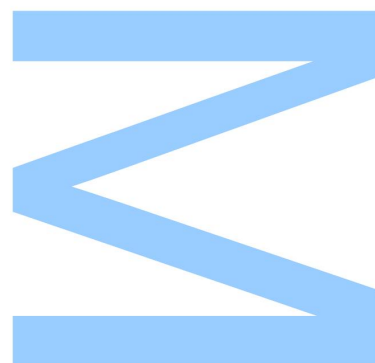




Todas as correções determinadas  
pelo júri, e só essas, foram efetuadas.

O Presidente do Júri,

Porto, \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_



# Agradecimentos

Ao meu orientador, professor doutor Samuel Lopes, pela inspiração, disponibilidade, cumplicidade e pelo apoio em todos os momentos.

À professora doutora Maria Leonor Moreira por me ter ouvido e apoiado sempre que precisei.

Ao professor José Carlos Santos pela disponibilidade imediata em me ajudar a construir algumas imagens no *Geogebra*.

Às minhas amigas, Paula, Ana João, Cláudia e Sandra, pela ajuda e pela força que me deram nos momentos mais difíceis.

A todos os outros que não nomeio mas que, de alguma forma, contribuíram para que este objetivo se realizasse.

Ao meu amigo Edgar por ter idealizado e construído comigo a capa desta tese.

Ao Marco por, juntamente com o Zé, me ter impulsionado a tirar o mestrado.

Aos meus pais por me terem ensinado a nunca desistir de um sonho e por me terem ensinado a importância do desenvolvimento constante do conhecimento.

Ao Zé e aos meus filhos, José Henrique e Pedro Filipe, por tudo o que representam na minha vida, pelas horas em que estive isolada, pelos maus humores que suportaram e pelas brincadeiras estratégicas que inventaram para a mamã poder trabalhar, sobretudo quando o papá esteve ausente.

# Resumo

Este trabalho visa explorar conceitos básicos de uma forma rigorosa mas acessível a todos os professores de matemática, tendo como objetivo, não só expor os temas em questão, mas também levar o leitor a levantar outras questões e, assim, desafiá-lo a construir conhecimento matemático.

O Capítulo 1 aprofunda conhecimentos ligados às frações, conceito abordado já no 1º ciclo, e introduz uma operação menos conhecida, a mediante de duas frações irredutíveis, que terá um papel ubíquo neste e nos restantes capítulos desta tese. O capítulo dois apresenta uma interpretação geométrica de alguns dos conceitos do primeiro capítulo. O conceito de fração mediante, fortemente referido no primeiro capítulo, volta a ser abordado no Capítulo 2, de uma forma surpreendentemente diferente. No Capítulo 3, como introdução aos dois capítulos seguintes, apresentar-se-á uma breve introdução à teoria dos grafos. Neste capítulo, pretende-se mostrar não só a relação desta teoria com o quotidiano, como introduzir o conceito específico de árvore, conceito a explorar mais alargadamente nos Capítulos 4 e 5, em que são mostradas diferentes formas de enumerar os números racionais, cada uma delas com um conjunto distinto mas interessante de propriedades. Uma dessas formas de enumerar os racionais é recorrendo à árvore de Stern-Brocot, que é estudada no Capítulo 4 e que se baseia nas sequências de Farey, já apresentadas no Capítulo 1. A outra enumeração que apresentaremos dos racionais é baseada noutra árvore designada por árvore de Calkin-Wilf e numa sucessão de contagem relacionada com o sistema de numeração binário.

**Palavras chave:** Enumeração dos Racionais, Fração mediante, Sequência de Farey, Círculo de Ford, Grafos, Árvores, Árvore de Stern-Brocot e Árvore de Calkin-Wilf.



# Abstract

This thesis aims to explore basic concepts from an underlying rigorous perspective, at the same time employing straightforward terminology comprehensible to teachers. It also sets out not only to explain the topics under study, but also to lead readers into raising their own mathematical questions, thus challenging them into enhancing their mathematical knowledge.

The first chapter is concerned with fractions, a topic which is already taught to primary school students. Nonetheless, it introduces a lesser-known operation, the mediant of two irreducible fractions, which will also play an extended role in the chapters that follow. Chapter two presents a geometrical interpretation of some of the concepts focused on in Chapter one. The concept of a mediant fraction, strongly highlighted in Chapter one, is once more approached in the second chapter, however from a surprisingly different perspective.

Chapter three, serving as an introduction to the following two chapters, also provides a short introduction to the theory of graphs. The objective of this chapter is not only to explore the relationship between graph theory and certain concrete *real-world* applications, but also to introduce the concept of a tree, which will be largely used in Chapters four and five, in which different but interesting ways of enumerating the positive rationals are shown, each bearing its own set of properties. One of these ways of enumerating the positive rationals relies on the Stern-Brocot tree, studied in Chapter four of this thesis, and which is closely related to the Farey sequences presented in Chapter 1. The other type of enumeration of the positive rationals which is presented here is based on another tree, the so-called Calkin-Wilf tree, as well as on a counting sequence related to the binary system.

**Keywords:** Enumeration of the rationals, Mediant, Farey Series, Ford Circles, Graph, Tree, Stern-Brocot tree, Calkin-Wilf tree.

# Índice

<b>Resumo.....</b>	<b>II</b>
<b>Abstract.....</b>	<b>III</b>
<b>Lista de tabelas e figuras .....</b>	<b>5</b>
<b>Introdução .....</b>	<b>6</b>
<b>Capítulo 1: Sequências de Farey .....</b>	<b>8</b>
1.1. Sequências de Farey e Frações Mediantes.....	8
1.2. A função $\varphi$ de Euler.....	13
1.3. Determinação do termo que sucede a dois termos consecutivos.....	19
1.4. Relação unimodular e irreducibilidade das mediantes .....	21
<b>Capítulo 2: Círculos de Ford .....</b>	<b>26</b>
<b>Capítulo 3: Teoria de Grafos .....</b>	<b>37</b>
<b>Capítulo 4: Árvore de Stern-Brocot.....</b>	<b>46</b>
<b>Capítulo 5: Árvore de Calkin-Wilf.....</b>	<b>59</b>
<b>Conclusão.....</b>	<b>77</b>
<b>Bibliografia .....</b>	<b>78</b>



# Lista de tabelas e figuras

Tabela 1.....	27
Tabela 2.....	47
Figura 1 .....	25
Figura 2.....	26
Figura 3 .....	28
Figura 4.....	28
Figura 5: Círculos tangentes entre si e ao eixo das abcissas.....	31
Figura 6.....	31
Figura 7.....	32
Figura 8.....	32
Figura 9.....	34
Figura 10.....	35
Figura 11: Mapa do Metro da cidade do Porto.....	37
Figura 12: Exemplo de um grafo.....	38
Figura 13: Mapa do Parque da Cidade do Porto.....	39
Figura 14: Duas árvores com 7 vértices.....	41
Figura 15.....	42
Figura 16: Algumas árvores.....	42
Figura 17: Planta da cidade de Königsberg.....	45
Figura 18.....	48
Figura 19: Enumeração de $IN \times IN$ .....	49
Figura 20.....	52
Figura 21 .....	53
Figura 22: Primeiros níveis da árvore de Stern-Brocot.....	54
Figura 23.....	57
Figura 24: Primeiros níveis da árvore de Calkin-Wilf.....	69

# Introdução

Esta tese, a sua estrutura, bem como a escolha dos temas que a constituem foram alvo de uma intensa reflexão na medida em que, pela minha experiência, um professor de matemática interessado em aprofundar ou alargar conhecimentos nem sempre tem ao seu dispor informação ou estudos rigorosos que sejam suficientemente acessíveis, quando a sua formação se restringe ao nível do 1º ciclo de estudos do ensino superior, ou quando já esqueceu pequenos grandes pormenores em termos de conceitos, linguagem e notação.

Assim, ao longo de todo o trabalho, usar-se-á uma linguagem científica que consideramos adequada e acessível a todos os interessados por estes temas. Serão ainda usados os seguintes símbolos que pretendem chamar a atenção do leitor para certos aspetos do texto:

- ❖ Questões levantadas;
-  Sugestões de atividades;
- ☑ Resolução de atividades;
- ! Chamadas de atenção;
-  Questões finais.

Qualquer um dos temas escolhidos permite alargar o leque de atividades a desenvolver em contexto escolar. Deste modo, não só serão explicadas propriedades como apresentadas as respetivas provas. Tanto quanto possível, procurar-se-á ativar conceitos base no início de cada capítulo, revendo pequenas noções matemáticas que terão relação com cada um dos temas a abordar. Além disto, o que no meu entender é mais desafiante, o leitor será incentivado a descobrir propriedades, através de questões propostas, e a tirar conclusões acerca de alguns aspetos relativos aos temas apresentados. No sentido de consolidar e potenciar o entendimento de algumas propriedades, o leitor encontrará, ao longo de cada capítulo, sugestões de atividades. A resolução das referidas atividades encontrar-se-á imediatamente após a proposta de cada uma delas. Para promover novas interpretações dos diferentes temas e tornar o conhecimento matemático mais significativo, serão sugeridas ainda algumas tarefas, que poderão ser encontradas no final de cada capítulo.

Este trabalho está estruturado, de acordo com o tema, em cinco capítulos.

No primeiro capítulo, designado Sequências de Farey, mostrar-se-á uma forma de escrever todas as frações entre 0 e 1, tendo em atenção o seu denominador.

No segundo capítulo, intitulado Círculos de Ford, apresentar-se-á uma interpretação geométrica das sequências apresentadas no capítulo anterior.

O capítulo três, denominado Teoria dos Grafos, pretende estabelecer uma ligação entre o conceito de árvore e os capítulos alusivos à enumeração dos números racionais.

Nos capítulos quatro e cinco, designados respetivamente por Árvore de Stern-Brocot e Árvore de Calkin-Wilf, serão mostradas diferentes formas de enumerar os racionais.

# Capítulo 1: Sequências de Farey

John Farey, conhecido geólogo e escritor inglês, ficou especialmente conhecido no ramo da matemática pela descoberta das designadas sequências de Farey (ver [1]).

Durante o tempo em que trabalhou como capataz para o duque de Bedford, Farey desenvolveu o gosto pela Geologia, uma área que já antes lhe interessava particularmente. Nessa mesma época também trabalhou para o mesmo duque um engenheiro e geólogo inglês chamado William Smith. Este, era fundamentalmente conhecido pelo seu trabalho na área da estratificação. Foi William Smith quem mais contribuiu para que Farey fosse desenvolvendo as suas competências ao nível da Geologia. Cerca de dez anos depois, após a morte do duque, Farey conseguiu estabelecer-se como consultor e geólogo em Londres e, por todas as competências que desenvolveu com William Smith, conseguiu que o seu trabalho fosse reconhecido.

As suas contribuições para a ciência estão relacionadas com essas competências que foi desenvolvendo e com os cerca de sessenta artigos científicos que escreveu na área da Geologia (ver [11] e [12]).

## 1.1. Sequências de Farey e Frações Mediantes

Consideremos como exemplo as frações próprias, ou seja, frações entre 0 e 1, no sentido lato, com denominador menor ou igual a 7.

De forma muito simples podemos escrevê-las do seguinte modo, em função do seu denominador:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$$


Claro que, uma vez que algumas destas frações não estão na forma irredutível, temos valores repetidos. Assim, neste caso particular, existem apenas 19 frações próprias com denominador inferior a 8, formando a seguinte sequência crescente:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}. \quad (1)$$

De forma análoga, para  $n \geq 1$ , designemos por  $F_n$  a sequência crescente formada pelas frações, em forma irredutível, entre 0 e 1 cujo denominador não excede  $n$ . Assim, a sequência anterior, onde se estabeleceu que os denominadores das frações próprias não podiam exceder 7, pode ser designada por  $F_7$ .

A observação da sequência anterior leva-nos à busca de possíveis relações entre os seus termos. Assim, poderiam ser levantadas algumas questões, tais como:

- ❖ Uma vez que a sequência (1) está escrita por ordem crescente, existirá alguma relação entre frações vizinhas? Poderemos através de umas determinar outras?
- ❖ As frações com o mesmo denominador terão alguma relação?
- ❖ Sabendo o número de elementos de uma sequência conseguiremos determinar o número de elementos da sequência de ordem seguinte?
- ❖ E saberemos ainda dizer quantas frações tem uma determinada sequência sem a escrevermos?
- ❖ Poderemos saber quais os termos da sequência que tem, por exemplo, 33 elementos?
- ❖  $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{3+4} = \frac{3}{7}$  é um erro que se verifica com alguma frequência entre alunos na escola. Existirá algum contexto em que a soma de numeradores e de denominadores faça sentido?

 Acrescente a  $F_7$  os elementos necessários para completar a sequência  $F_{10}$  e tire conclusões acerca das frações acrescentadas.

As propriedades que a seguir se apresentam respondem a estas e a outras questões que ao longo do capítulo poderão ser formuladas.

#### *Propriedade:*

Uma das propriedades que se pode observar em (1) é que, considerando três quaisquer termos consecutivos de uma sequência de Farey, a fração intermédia tem como

numerador a soma dos numeradores das frações adjacentes à esquerda e à direita e como denominador a soma dos denominadores das mesmas frações.

Ao longo deste capítulo utilizaremos com frequência a designação de fração mediante, que será definida de seguida.

*Definição:*

Dadas frações na forma de fração irredutível, digamos  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$ , com  $a, b, c, d \geq 0$ , a sua fração mediante é  $\frac{a+c}{b+d}$ .

! Repare que  $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$  mas a fração mediante de  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{5}{7}$  é  $\frac{3+5}{5+7} \neq \frac{6+5}{10+7}$ .

*Propriedade:*

Se  $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  são frações irredutíveis então a fração mediante  $\frac{a+c}{b+d}$  satisfaz a condição

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Sejam  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  frações irredutíveis, com  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_0^+$  e suponhamos que  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ .

Para vermos que  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ , ambas as desigualdades têm que ser verificadas.

Vejamos,

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{ab+cb-ab-ad}{b(b+d)} = \frac{cb-ad}{b(b+d)} > 0 \text{ porque } \frac{a}{b} < \frac{c}{d}.$$

Do mesmo modo,

$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{cb+cd-ad-cd}{d(b+d)} = \frac{cb-ad}{d(b+d)} > 0.$$

Fica assim provada a propriedade enunciada.

Observando, por exemplo, as frações  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{5}{7}$  verifica-se que  $\frac{2}{3} = \frac{3+5}{5+7}$  é a mediante de

$$\frac{3}{5} \text{ e } \frac{5}{7}.$$



## Algoritmo recursivo para a construção das sequências de Farey

Veremos na secção 1.4 que as sequências de Farey podem ser construídas do seguinte modo:

- Toma-se como ponto de partida a primeira sequência de Farey,  $F_1$ , constituída apenas pelas frações  $\frac{0}{1}$  e  $\frac{1}{1}$ .
- De seguida, com o cuidado de não introduzir frações com denominador maior que a ordem da sequência, introduzem-se sucessivamente as medianes de cada par de frações consecutivas.

O resultado que se obtém até  $F_7$  é o seguinte:

$F_1$	$\frac{0}{1}$																	$\frac{1}{1}$	
$F_2$	$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{2}$									$\frac{1}{1}$	
$F_3$	$\frac{0}{1}$					$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{2}$			$\frac{2}{3}$						$\frac{1}{1}$	
$F_4$	$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{2}$			$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$				$\frac{1}{1}$	
$F_5$	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$			$\frac{1}{1}$	
$F_6$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$		$\frac{1}{1}$	
$F_7$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{1}$

Repare ainda que, independentemente da ordem da sequência,  $\frac{1}{2}$  é sempre o valor central da sequência.

 Tente encontrar uma justificação para esta afirmação.

- ☒ De acordo com a forma anteriormente exposta para se construir uma série de Farey a partir das frações  $\frac{0}{1}$  e  $\frac{1}{1}$ , foram sendo introduzidas as medianes de cada par de frações consecutivas. Isto significa que o número de frações que se vão

introduzindo à esquerda de  $\frac{1}{2}$  é igual ao número de frações introduzidas à sua direita.

- ❖ Será que, observando as sequências de Farey, ainda se podem encontrar mais curiosidades? Por exemplo, qual é a soma de quaisquer dois termos equidistantes de  $\frac{1}{2}$ ?

Como deve ter provado anteriormente,  $\frac{1}{2}$  é o valor central de qualquer sequência de Farey. Além disso, os termos equidistantes de  $\frac{1}{2}$  têm o mesmo denominador e a sua soma é 1.

Vejamos que é assim:

Considerando  $\frac{a}{b}$  um termo de uma sequência escrito na forma irredutível, onde  $\frac{a}{b} < \frac{1}{2}$ , podemos verificar que a distância entre estas duas frações é  $\frac{1}{2} - \frac{a}{b} = \frac{b-2a}{2b}$ .

Assim, a fração que se encontra à direita de  $\frac{1}{2}$  e à mesma distância de  $\frac{a}{b}$  será

$$\frac{1}{2} + \frac{b-2a}{2b} = \frac{2b-2a}{2b} = \frac{b-a}{b}.$$


Se somarmos as duas frações encontradas verificamos que o resultado é 1:

$$\frac{a}{b} + \frac{b-a}{b} = \frac{b}{b} = 1.$$

Assim, se não há nenhum inteiro maior do que 1 que divida  $a$  e  $b$ , também não haverá nenhum que divida  $b-a$  e  $b$ . Deste modo,  $\frac{b-a}{b}$  também estará na forma irredutível.

 Considere as seguintes sequências de Farey:

- Sequência de Farey de ordem 3:  $\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$ ;
- Sequência de Farey de ordem 4:  $\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$ ;
- Sequência de Farey de ordem 5:  $\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$ .

 Para cada uma das sequências dadas, determine a soma dos numeradores e dos denominadores e tente encontrar alguma relação entre estes.

☑ Deve ter verificado que, em todos os casos, a soma dos denominadores é o dobro da soma dos numeradores.

Resta tentarmos provar que isso se aplica a todas as sequências  $F_n$ , com  $n \geq 1$ .

Considerando as frações  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{b-a}{b}$ , equidistantes de  $\frac{1}{2}$ , somemos os numeradores e somemos os denominadores:

- $a + b - a = b$ ;
- $b + b = 2b$ .

Uma vez que, para cada par de termos equidistantes de  $\frac{1}{2}$ , a soma dos denominadores é o dobro da soma dos numeradores, e o mesmo se verifica para a fração central  $\frac{1}{2}$ , então a soma de todos os denominadores é o dobro da soma de todos os numeradores, dada a simetria já referida de cada sequência de Farey.

## 1.2. A função $\varphi$ de Euler

Continuando a explorar a sequência  $F_7$ , podemos verificar que o número de termos da sequência é 19.

A propriedade que vamos ver de seguida indicará uma forma de encontrar o número total de frações numa sequência de Farey.

Designemos o número de termos da sequência  $F_n$  por  $N_n$ .

Em primeiro lugar, podemos concluir que o número de frações próprias de qualquer sequência, exceto de  $F_1$ , será um número ímpar, dado que a sequência é simétrica relativamente a  $\frac{1}{2}$ .

Em segundo lugar, considerando que todas as frações que constituem a sequência estão escritas na forma irredutível, podemos garantir que o numerador e o denominador que caracterizam cada fração são primos entre si e que, na sequência de ordem  $n$ , os

denominadores podem tomar os valores 1, 2, 3, 4, ...,  $n$ . Assim, uma forma aparentemente rápida de contar o número de frações próprias de uma sequência de ordem  $n$  é determinar, para cada denominador  $k$  menor ou igual que  $n$ , quantos são os numeradores entre 1 e  $k$  que são primos com  $k$ . Designando esse número por  $\varphi(k)$ , temos

$$\varphi(k) = \left| \left\{ 1 \leq i \leq k : m.d.c.(k, i) = 1 \right\} \right|,$$

onde, para um conjunto  $A$ ,  $|A|$  representa o seu cardinal.

Particularizando este procedimento no exemplo em estudo, onde  $n = 7$ , temos que:

- $\varphi(1) = 1$ ; note-se, no entanto, que  $F_1$  tem dois termos porque inclui também a fração  $\frac{0}{1} = 0$ ;
- $\varphi(2)$  representa o número de inteiros positivos entre 1 e 2 que são primos com 2. Neste caso,  $\varphi(2) = 1$ ;
- $\varphi(3)$  representa, do mesmo modo, o número de inteiros positivos entre 1 e 3, que são primos com 3. Neste caso, apenas 1 e 2 são primos com 3, logo  $\varphi(3) = 2$ ;
- $\varphi(4) = 2$  porque apenas 1 e 3 são primos com 4;
- $\varphi(5) = 4$  porque 1, 2, 3 e 4 são primos com 5;
- $\varphi(6) = 2$  porque apenas 1 e 5 são primos com 6;
- $\varphi(7) = 6$  porque todos os números menores que 7 são primos com ele.

Assim,

$$\begin{aligned} N_7 &= 1 + \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(5) + \varphi(6) + \varphi(7) \\ &= 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 2 + 6 \\ &= 19. \end{aligned}$$

Em geral, para  $n \geq 1$ ,

$$N_n = 1 + \sum_{k=1}^n \varphi(k).$$

Porém, este processo simples pode não ser suficientemente prático para determinar o número de elementos de uma sequência quando esta é de uma ordem substancialmente mais elevada.

Observemos algumas situações particulares e muito curiosas, inerentes ao procedimento anterior.

Quando calculamos  $\varphi(2)$ ,  $\varphi(3)$ ,  $\varphi(5)$  e  $\varphi(7)$  estamos a determinar o número de inteiros positivos que não excedem e são primos com 2, 3, 5 e 7, respetivamente. Repare-se que, neste caso, todos estes números são primos e, por isso, todos os números menores que eles serão primos com eles. Isto permite-nos afirmar que se  $p$  é um número primo,

$$\varphi(p) = p - 1.$$

Se tomarmos como exemplos casos em que o número  $n$  não é primo, tendo em conta a relação anterior, podemos decompor  $n$  em fatores primos e tentar formular, a partir daí, algumas conjeturas para o cálculo de  $\varphi(n)$ .

Começemos por analisar casos simples, como por exemplo  $\varphi(6)$ . Por decomposição em fatores primos,  $6 = 2 \times 3$ .

A função  $\varphi$  tem a seguinte propriedade, que permite simplificar o cálculo de  $\varphi(n)$  a partir da decomposição de  $n$  em fatores primos:

$$\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b), \text{ se } m.d.c.(a, b) = 1. \quad (2)$$

Esta relação será devidamente provada no final desta secção.

Assim,  $\varphi(6) = \varphi(2 \times 3) = \varphi(2) \times \varphi(3)$  e, pela relação  $\varphi(p) = p - 1$  para  $p$  primo, obtemos  $\varphi(6) = \varphi(2) \times \varphi(3) = (2 - 1) \times (3 - 1) = 2$ , como havíamos anteriormente verificado.

No entanto, quando a decomposição de  $n$  em fatores primos dá origem a fatores com expoentes superiores a 1, este procedimento não é suficiente. Por exemplo,  $\varphi(48) = \varphi(4^2 \times 3) = \varphi(4^2) \times \varphi(3) = \varphi(4^2) \times (3 - 1) = 2\varphi(4^2)$ . Pretende-se, então, encontrar uma expressão para  $\varphi(p^\alpha)$  onde  $p$  é um primo e  $\alpha$  é um número natural. Pelo procedimento exemplificado anteriormente, isto será suficiente para determinar  $\varphi(n)$  para qualquer  $n$ .

Determinar  $\varphi(p^\alpha)$  consiste em saber quantos números  $k$ ,  $1 \leq k \leq p^\alpha$ , são primos com  $p^\alpha$ .

Se  $k$  e  $p^\alpha$  são primos entre si, então  $m.d.c.(k, p^\alpha) = 1$ , ou seja,  $p$  não divide  $k$ . Por outro lado, se  $m.d.c.(k, p^\alpha) \neq 1$ , então  $p$  divide  $k$ , ou seja,  $k$  é um múltiplo de  $p$ . Neste caso,  $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - \text{número de inteiros entre 1 e } p^\alpha \text{ que são múltiplos de } p$ .

Para calcular  $\varphi(p^\alpha)$  consideremos o seguinte:

Os elementos entre 1 e  $p^\alpha$  que são múltiplos de  $p$  são:  $1p, 2p, 3p, \dots, p^\alpha$ . Assim, como  $p^\alpha = p^{\alpha-1} \times p$  podemos concluir que existem  $p^{\alpha-1}$  elementos de 1 até  $p^\alpha$  que são múltiplos de  $p$ .

Desta forma,  $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p-1)$ .

Podemos agora calcular  $\varphi(48)$ .

$$\varphi(48) = \varphi(4^2 \times 3) = \varphi(4^2) \times \varphi(3) = 4 \times 3 \times 2 = 24.$$

 Usando as relações expostas, determine  $\varphi(35280)$ .



$$\begin{aligned}\varphi(35280) &= \varphi(2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7^2) \\ &= \varphi(2^4) \times \varphi(3^2) \times \varphi(5) \times \varphi(7^2) \\ &= (2^4 - 2^3) \times (3^2 - 3) \times (5 - 1) \times (7^2 - 7) \\ &= 8 \times 6 \times 4 \times 42 \\ &= 8064.\end{aligned}$$

No que se segue, apresenta-se uma expressão para  $\varphi(n)$  e prova-se a igualdade (2) utilizada acima, ou seja,

$$\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b), \text{ se } m.d.c.(a, b) = 1.$$

À semelhança do que referimos anteriormente,

$$\varphi(n) = \text{número de inteiros entre 1 e } n \text{ que são primos com } n. \quad (3)$$

$$= n - \text{número de inteiros entre 1 e } n \text{ que não são primos com } n. \quad (4)$$

Considerando  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_t^{\alpha_t}$  ( $\alpha_i > 0$ ) a decomposição de  $n$  em fatores primos e  $M_i$  o conjunto dos múltiplos de  $p_i$  ( $1 \leq i \leq t$ ) entre 1 e  $n$ , o conjunto dos números entre 1 e  $n$  que não são primos com  $n$  é a união  $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_t$ .

Tomemos alguns exemplos para melhor compreender o que acabámos de afirmar.

Consideremos, num primeiro exemplo,  $n = 45$ .

Sabemos que  $\{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 30, 33, 35, 36, 39, 40, 42, 45\}$  é o conjunto dos números que não são primos com 45, num total de 21, concluindo assim que existem 24 números que são primos com 45.

Pelas igualdades (3) e (4) podemos verificar que,  $\varphi(45) = 45 - 24 = 21$ .

Por outro lado, uma vez que  $n = 45 = 3^2 \times 5$ , consideremos os conjuntos dos múltiplos de 3 e 5, tendo em conta que estes são os primos envolvidos na decomposição do número 45.

Neste caso, se  $p_1 = 3$  e  $p_2 = 5$ , temos que  $M_1 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45\}$  e  $M_2 = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45\}$ , pelo que  $\#(M_1 \cup M_2) = 21$ .

❖ Como calcular o cardinal da reunião de dois conjuntos?

O tema das Probabilidades, ensinado pela primeira vez aos alunos do 9º ano de escolaridade, aborda a questão da probabilidade da reunião de dois conjuntos. A este propósito, os alunos devem compreender que  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ , muitas vezes recorrendo à ajuda de um diagrama de Venn.

De forma análoga, o cardinal de reunião de dois conjuntos é dado por

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \quad (5)$$

Aplicando esta igualdade ao exemplo anterior, concluímos que  $|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2| = 15 + 9 - 3 = 21$ .

Consideremos, como outro exemplo,  $n = 30$ .

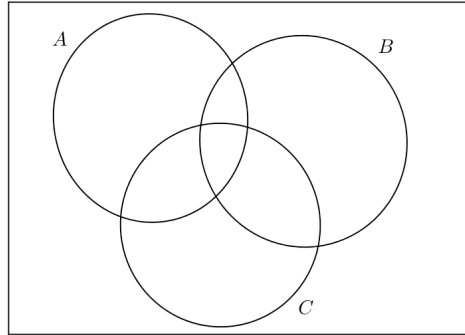
❖ O que acontecerá de diferente relativamente ao exemplo anterior?

Repare que nesta situação  $30 = 2 \times 3 \times 5$  e, por isso, tomaremos para os conjuntos de múltiplos, os números  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$  e  $p_3 = 5$ , ou seja,  $M_1 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}$ ,  $M_2 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$  e  $M_3 = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ .

Como pode observar, este é um exemplo que envolve mais do que dois conjuntos e, por essa razão, impõe-se a seguinte questão:

- ❖ Como proceder se quisermos calcular o cardinal da reunião de mais do que dois conjuntos?

Com a ajuda de um diagrama de Venn



concluimos que,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \quad (6)$$

Aplicando esta última relação ao exemplo considerado, observamos que

$$\begin{aligned} |M_1 \cup M_2 \cup M_3| &= |M_1| + |M_2| + |M_3| - |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_2 \cap M_3| + |M_1 \cap M_2 \cap M_3| \\ &= 15 + 10 + 6 - 5 - 3 - 2 + 1 \\ &= 22. \end{aligned}$$

Repare que existem sempre números repetidos nos conjuntos  $M_i$ , por exemplo,  $n$  ocorre em todos estes conjuntos. Como tal, ao calcular o cardinal da reunião de dois ou mais desses conjuntos, devemos ter cuidado para que os números que aparecem repetidos não sejam contabilizados mais do que uma vez. As relações (5) e (6) referidas anteriormente mostram uma forma eficaz de fazer essa contagem, sendo baseadas num processo que se designa por Princípio de Inclusão-Exclusão.

Para facilitar a escrita começemos por definir, dados índices  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ ,  $M_{i_1 \dots i_k} = M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \dots \cap M_{i_k}$ , o conjunto dos múltiplos de  $p_{i_1} \times p_{i_2} \times \dots \times p_{i_k}$  entre 1 e  $n$ .

O princípio de Inclusão-Exclusão diz que:

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^t M_i \right| &= (|M_1| + |M_2| + \dots + |M_t|) - (|M_1 \cap M_2| + |M_1 \cap M_3| + \dots) + (|M_1 \cap M_2 \cap M_3| + \dots) - \dots \\ &= \sum_{k=1}^t \sum_{i_1 < \dots < i_k} (-1)^{k+1} |M_{i_1 \dots i_k}|. \end{aligned}$$



Notemos que  $|M_i| = \frac{n}{p_i}$ .

Analogamente, se  $i \neq j$ ,  $|M_i \cap M_j| = \frac{n}{p_i p_j}$  e, mais genericamente,  $|M_{i_1} \cap \dots \cap M_{i_k}| = \frac{n}{p_{i_1} \times \dots \times p_{i_k}}$ ,

já que os primos  $p_{i_1}, \dots, p_{i_k}$  são distintos.

Assim,

$$\begin{aligned}
 \varphi(n) &= n - \left| \bigcup_{i=1}^t M_i \right| \\
 &= n - (|M_1| + |M_2| + \dots) + (|M_1 \cap M_2| + \dots) - (|M_1 \cap M_2 \cap M_3| + \dots) + \dots \\
 &= n - \left( \frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \dots + \frac{n}{p_t} \right) + \left( \frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \dots \right) - \dots \\
 &= n \left( 1 - \sum_{i=1}^t \frac{1}{p_i} + \sum_{i < j} \frac{1}{p_i p_j} - \sum_{i < j < k} \frac{1}{p_i p_j p_k} + \dots \right) \\
 * \quad &= n \left( 1 - \frac{1}{p_1} \right) \left( 1 - \frac{1}{p_2} \right) \dots \left( 1 - \frac{1}{p_t} \right) \\
 &= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t} \frac{p_1 - 1}{p_1} \frac{p_2 - 1}{p_2} \dots \frac{p_t - 1}{p_t} \\
 &= p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_t^{\alpha_t - 1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_t - 1),
 \end{aligned}$$

o que permite calcular  $\varphi(n)$ , conhecida a decomposição de  $n$  em fatores primos (cf. [6]).

Com vista à prova da relação (2), suponhamos que  $a$  e  $b$  são inteiros positivos primos entre si. Então, os conjuntos dos divisores primos de  $a$  e de  $b$  são disjuntos, e segue facilmente desta observação e da fórmula obtida acima a igualdade (2).

\* Ao expandir  $\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_t}\right)$  usando a distributividade, em cada fator escolhemos

1 ou  $-\frac{1}{p_i}$ , logo as parcelas serão do tipo  $(-1)^k \frac{1}{p_{i_1} \dots p_{i_k}}$ , para  $i_1 < \dots < i_k$  e  $0 \leq k \leq t$ .

### 1.3. Determinação do termo que sucede a dois termos consecutivos

Consideremos as frações  $\frac{1}{7}$  e  $\frac{1}{6}$ , consecutivas em  $F_7$ . Tendo em conta o algoritmo apresentado para a construção dos termos de uma sequência de Farey, sabe-se que a fração que sucede a  $\frac{1}{7}$  e  $\frac{1}{6}$ , em  $F_7$ , será uma fração  $\frac{x}{y}$  em que  $\frac{1+x}{7+y} = \frac{1}{6}$ . Logo, existe

uma constante natural  $z$  que verifica  $\begin{cases} 1+x=1 \times z \\ 7+y=6 \times z \end{cases}$  ou seja,  $\begin{cases} x=z-1 \\ y=6z-7 \end{cases}$ . Como em  $F_7$  os denominadores não podem exceder 7, facilmente se conclui que, neste caso,  $z$  tem de ser 2 e por isso  $y=6 \times 2-7=12-7=5$  e por conseguinte  $x=2-1=1$ . Fica assim determinado que  $\frac{x}{y}=\frac{1}{5}$ .

❖ Existirá, em geral, um único possível valor para a constante  $z$ ?

Vejamos se este procedimento é igualmente simples se escolhermos as frações consecutivas  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{5}$  em  $F_7$ . Do mesmo modo podemos afirmar que sendo  $\frac{x}{y}$  a fração

que lhes sucede em  $F_7$ , então  $\frac{1+x}{3+y}=\frac{2}{5}$ , donde obtemos  $\begin{cases} x=2z-1 \\ y=5z-3 \end{cases}$  para algum inteiro  $z$ .

Nesta situação deparamo-nos com algo novo relativamente à situação anterior.

Para que  $y$  não exceda 7,  $z$  pode tomar os valores 1 ou 2. Observe-se que tomando  $z=1$  obtemos a fração  $\frac{1}{2}$  que sucede  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{5}$  em  $F_5$  e em  $F_6$ ; tomando  $z=2$  obtemos a fração  $\frac{3}{7}$  que sucede  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{5}$  em  $F_7$  como se pretende no exemplo considerado.

❖ Então, como determinar  $z$ ?

Para entendermos como tratar esta ou outras situações semelhantes, consideremos três termos consecutivos da sequência  $F_n$ , digamos  $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} < \frac{x}{y}$ . Significa assim que  $\frac{x}{y}$  é a fração que menos difere de  $\frac{a'}{b'}$  de entre todas as frações de  $F_n$  maiores que  $\frac{a'}{b'}$ .

Tal como vimos anteriormente,  $\frac{a'}{b'}$  é a mediantes de  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{x}{y}$ . Assim,  $\frac{a+x}{b+y}=\frac{a'}{b'}$  e por isso existe um  $z$  natural tal que  $\begin{cases} x=za'-a \\ y=zb'-b \end{cases}$ .

Como  $y \leq n$ , da segunda equação anterior vem que  $zb'-b \leq n$ , logo  $z \leq \frac{n+b}{b'}$  e assim

$z \leq \left\lfloor \frac{n+b}{b'} \right\rfloor$  já que  $z$  é inteiro, onde  $\lfloor \alpha \rfloor$  designa o maior inteiro que não excede  $\alpha$ .

Porém, notemos que esta última relação não permite determinar  $z$ .

Suponhamos que  $z < \left\lfloor \frac{n+b}{b'} \right\rfloor$ . Então  $z+1 \leq \frac{n+b}{b'}$  e, como  $a'b > ab'$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{za'-a}{zb'-b} - \frac{(z+1)a'-a}{(z+1)b'-b} &= \frac{(za'-a)[(z+1)b'-b] - (zb'-b)[(z+1)a'-a]}{(zb'-b)[(z+1)b'-b]} \\ &= \frac{b'(za'-a) - a(zb'-b)}{(zb'-b)[(z+1)b'-b]} \\ &= \frac{a'b - ab'}{(zb'-b)[(z+1)b'-b]} > 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} < \frac{(z+1)a'-a}{(z+1)b'-b} < \frac{za'-a}{zb'-b} \text{ e } (z+1)b'-b \leq n, \text{ o que mostra que } \frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{za'-a}{zb'-b} \text{ não são}$$

termos consecutivos em  $F_n$ .

Provamos assim que o valor que se pretende de  $z$  é o maior possível.

Por isso, na condição anteriormente referida,  $z \leq \left\lfloor \frac{n+b}{b'} \right\rfloor$ , devemos tomar  $z$  o maior inteiro

que não excede  $\frac{n+b}{b'}$  isto é  $z = \left\lfloor \frac{n+b}{b'} \right\rfloor$ .


Fica assim determinado o termo que sucede dois termos consecutivos numa sequência de Farey.

No caso apresentado,  $\frac{n+b}{b'} = \frac{7+3}{5} = 2$  e, por isso, o valor que se deve considerar para a constante  $z$  é 2, como se pretendia.

#### 1.4. Relação unimodular e irreducibilidade das medianes

Na sequência que temos vindo a analisar,  $F_7, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}$  são termos consecutivos. Repare que  $7 \times 1 - 3 \times 2 = 1$ .

- ❖ Será que esta relação se verifica para quaisquer termos consecutivos de uma sequência de Farey?

 Se experimentar para outras frações consecutivas, deve verificar essa relação.

Dizemos que as frações positivas  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  satisfazem a relação unimodular se  $bc - ad = 1$ .

*Proposição:*

Sejam  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in [0, 1]$ , com  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_0^+$  e suponhamos que  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  e  $bc - ad = 1$ . Se existirem  $h, k \in \mathbb{Z}_0^+$  tais que  $\frac{a}{b} < \frac{h}{k} < \frac{c}{d}$  e  $k \leq b + d$ , então  $k = b + d$ ,  $h = a + c$  e os pares de frações  $\frac{a}{b}, \frac{h}{k}$  e  $\frac{h}{k}, \frac{c}{d}$  satisfazem a relação unimodular.

Em particular, se  $\max\{b, d\} \leq n \leq b + d - 1$  então  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  são termos consecutivos em  $F_n$ .

*Demonstração:*

Suponhamos então que  $\frac{a}{b} < \frac{h}{k} < \frac{c}{d}$  e  $k \leq b + d$ . Temos que  $kc - hd \geq 1$  porque

$\frac{h}{k} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{h}{k} - \frac{c}{d} < 0 \Leftrightarrow hd - kc < 0 \Leftrightarrow kc - hd > 0 \Leftrightarrow kc - hd \geq 1$ , uma vez que  $h, d, k, c$  são

inteiros. Analogamente,  $hb - ak \geq 1$  porque  $\frac{a}{b} < \frac{h}{k}$ .

Logo,

$$\begin{aligned} k &= k \cdot 1 = k(bc - ad) = kbc - kad \\ &= b(kc - hd) + d(hb - ak) \\ &\geq b + d, \end{aligned}$$

de onde resulta que  $k = b + d$  porque partimos da hipótese que  $k \leq b + d$  mas acabámos de concluir que  $k \geq b + d$ . Além disso, a igualdade  $k = b + d$  implica que

$$b(kc - hd) + d(hb - ak) = b + d,$$

o que, por sua vez, implica que  $kc - hd = 1 = hb - ak$ . Assim, temos também que

$$h = h(bc - ad) = a(kc - hd) + c(hb - ak) = a + c.$$

Se  $\max\{b, d\} \leq n$ , então  $b \leq n$  e  $d \leq n$ , o que significa que  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  são termos de  $F_n$ . Note-se que estas frações estão na forma irredutível, pela relação unimodular: se  $l \geq 1$  dividir  $a$  e  $b$ , então  $l$  divide  $bc - ad$ , o que implica  $l = 1$ . Se  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  não forem termos consecutivos em  $F_n$ , então existem naturais  $h$  e  $k$  tais que  $\frac{a}{b} < \frac{h}{k} < \frac{c}{d}$  e  $k \leq n$ . Assim,  $k \leq n \leq b + d - 1 < b + d$ , o que contradiz o que foi provado acima. Logo,  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  são frações consecutivas em  $F_n$ .  $\square$

Podemos agora justificar o algoritmo dado na secção 1.1 para a construção das sequências de Farey.

**Teorema:**

Suponhamos que  $n \geq 1$ .

- (a) Se  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  são termos consecutivos em  $F_n$ , então  $bc - ad = 1$ .
- (b) Para  $n \geq 2$ , a sequência  $F_n$  obtém-se de  $F_{n-1}$  acrescentando as medianas dos termos consecutivos de  $F_{n-1}$ , cuja soma dos denominadores não excede  $n$ .

**Prova:**

A prova será feita por indução sobre  $n \geq 1$ .

Considerando as sequências  $F_n$  quando  $n = 1$  e  $n = 2$  temos  $F_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}$  e  $F_2 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}$ , o que permite verificar a veracidade das afirmações (a) e (b) para  $n \leq 2$ .

Suponhamos que o Teorema é válido para  $n - 1$  com  $n \geq 3$  e provemos o caso  $n$ .

Suponhamos também que  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  e que estas são frações consecutivas em  $F_n$ .

Se  $b, d \leq n - 1$ , então  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  são consecutivas em  $F_{n-1}$  e, por hipótese de indução, satisfazem a relação unimodular.

Logo, podemos assumir que  $b = n$  ou  $d = n$ ; digamos  $b = n$ .

Sejam  $\frac{x}{y}$  e  $\frac{z}{w}$  termos consecutivos em  $F_{n-1}$ , tal que:  $\frac{x}{y} < \frac{a}{b} < \frac{z}{w}$ . Então, por hipótese de

indução,  $yz - xw = 1$ . Como  $\frac{x}{y}$  e  $\frac{z}{w}$  são consecutivas em  $F_{n-1}$ ,  $y + w \geq n = b$ .


Logo, pela propriedade anterior,  $\frac{a}{b}$  é a mediana de  $\frac{x}{y}$  e  $\frac{z}{w}$ .

Resulta daqui que os pares  $\frac{x}{y} < \frac{a}{b}$  e  $\frac{a}{b} < \frac{z}{w}$  satisfazem a relação unimodular e, também,

que  $\frac{c}{d} \leq \frac{z}{w}$ , uma vez que  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  são frações consecutivas em  $F_n$ .


Se fosse  $\frac{c}{d} < \frac{z}{w}$  teríamos  $\frac{c}{d} = \frac{x+z}{y+w} = \frac{a}{b}$  pelo argumento usado acima, o que é absurdo.

Logo  $\frac{c}{d} = \frac{z}{w}$ , o que prova (a) e (b).  $\square$

 Será que todas as frações de uma sequência de Farey estão na forma irredutível?

- ☒ Observou-se que resulta de (a) do teorema anterior que ao calcularmos a mediana de duas frações consecutivas de uma sequência de Farey, obtemos diretamente uma fração irredutível. Como mostra o exemplo seguinte, esta propriedade da mediana não é válida para frações irredutíveis em geral.

A mediana de  $\frac{1}{9}$  e  $\frac{1}{5}$  é  $\frac{1+1}{9+5} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$ .

 Considere duas frações consecutivas de uma sequência de Farey e subtraia o menor termo ao maior termo. Encontra alguma particularidade? Conseguirá relacionar o que obteve com a relação unimodular?

- ☒ Tomando alguns exemplos, observa-se o seguinte, em  $F_7$ :

Para as frações  $\frac{1}{7}$  e  $\frac{1}{6}$ , temos  $\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$ ;

Para as frações  $\frac{4}{7}$  e  $\frac{3}{5}$ , temos  $\frac{3}{5} - \frac{4}{7} = \frac{1}{35}$ .

Do mesmo modo, considerando  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$ , com  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_0^+$ , duas frações consecutivas de uma sequência de Farey,  $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{db} = \frac{1}{db}$ , aplicando a relação unimodular.



Se marcarmos as frações irredutíveis da sequência de Farey de ordem 10 no referencial cartesiano, tomando como abcissas os valores dos denominadores e como ordenadas os respectivos valores dos numeradores, o que se obtém é o seguinte:

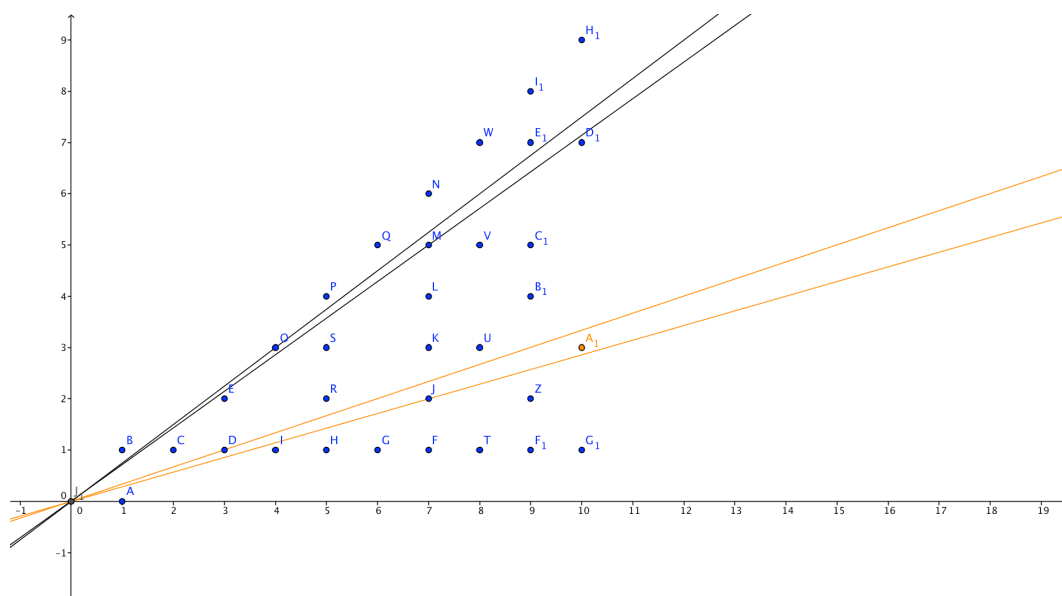


Figura 1

- ❖ Será que o facto de existirem pontos entre as retas laranja e não entre as retas pretas tem algum significado?
- ❖ Repare ainda que a determinação dos valores dos declives das funções lineares representadas dizem respeito a frações de  $F_{10}$ . Assim, poder-se-á concluir algo acerca da não existência de pontos entre as retas traçadas a preto?
- ❖ E, no caso das retas representadas a laranja, o ponto assinalado com a mesma cor terá alguma relação com os dois pontos usados para traçar as referidas funções lineares?

## Capítulo 2: Círculos de Ford

Lester Randolph Ford foi um conhecido matemático americano do início do século XX. Um dos principais temas por ele aprofundado está relacionado com as aproximações de números irracionais, tema sobre o qual fez o seu doutoramento. Muitos foram os artigos que escreveu na área da matemática. Porém, Ford tornou-se especialmente conhecido pela maravilhosa interpretação geométrica que fez das sequências de Farey, publicada no artigo *Fractions* [3] em 1938 (ver [14]).

Vamos considerar uma sequência de circunferências no semiplano positivo definido por  $y \geq 0$ , tangentes ao eixo das abcissas.

Começamos por considerar duas circunferências  $C_1$  e  $C_2$ , de raio  $\frac{1}{2}$ , tangentes entre si e tangentes ao eixo das abcissas em 0 e 1, respetivamente.

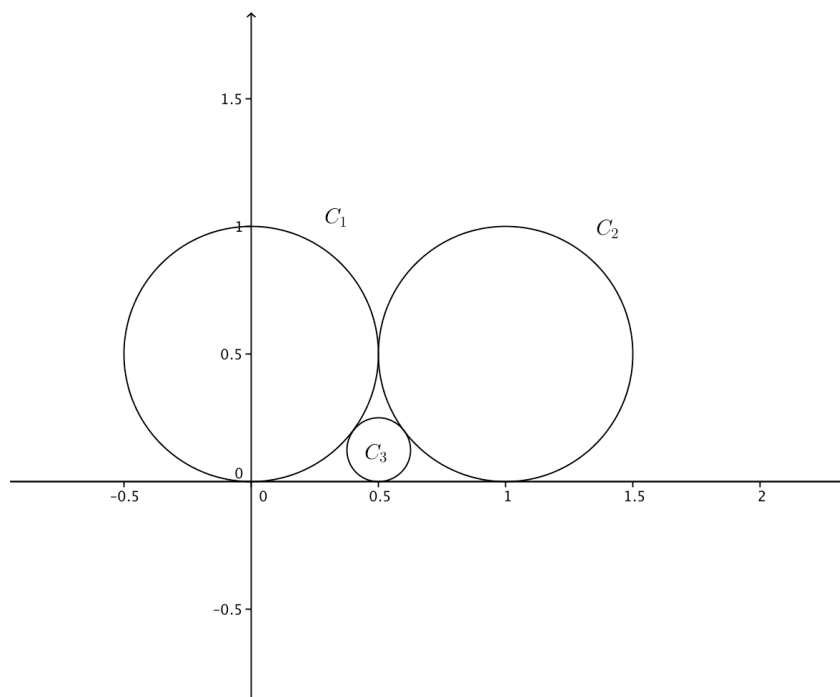


Figura 2

De seguida, tomamos a circunferência  $C_3$ , tangente a  $C_1$ ,  $C_2$  e ao eixo das abcissas. Dada a simetria da figura, concluímos imediatamente que  $C_3$  é tangente ao eixo das abcissas em  $\frac{1}{2}$ .



❖ Qual será o raio da circunferência  $C_3$  ?

Iteremos agora o procedimento acima, considerando a circunferência  $C_4$ , tangente a  $C_1$ ,  $C_3$  e ao eixo das abscissas, e a circunferência  $C_5$ , tangente a  $C_2$ ,  $C_3$  e ao eixo das abscissas. Continuando desta forma, obtemos uma sequência infinita de circunferências tangentes ao eixo das abscissas em pontos do intervalo  $[0,1]$ . Queremos determinar os pontos de tangência das novas circunferências com o eixo das abscissas e os seus raios. É possível resolver este problema recorrendo à fórmula de Descartes-Soddy (ver [15]), mas obteremos uma resolução que não depende desta fórmula, envolvendo as sequências de Farey, e que será mais elucidativa por não recorrer à inversão, técnica usualmente empregada para resolver problemas deste tipo.

Para já, comecemos por tentar encontrar uma relação entre os pontos de tangência de algumas destas circunferências com o eixo das abscissas e os seus respectivos raios.

Circunferência	$C_1$	$C_4$	$C_3$	$C_5$	$C_2$
Abcissa	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{1}$
Raio	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{2}$

Tabela 1

❖ Existirá alguma relação entre os raios e os pontos de tangência das várias circunferências com o eixo das abscissas?

Sejam  $C$  e  $D$  duas circunferências tangentes entre si e ao eixo das abscissas. Suponhamos que  $C$  intersecta o eixo das abscissas no ponto de abcissa racional  $\frac{a}{b}$  (com  $a$  e  $b$  inteiros maiores ou iguais a 0 e primos entre si), e que o seu raio é  $\frac{1}{2b^2}$ ; analogamente, suponhamos que  $D$  é tangente ao eixo das abscissas em  $\frac{c}{d}$  (com  $c$  e  $d$  inteiros positivos e primos entre si) e tem raio  $\frac{1}{2d^2}$ . Note-se que esta relação entre ponto de tangência no eixo das abscissas e raio se verifica para as circunferências iniciais  $C_1$  e  $C_2$ .

Seja  $E$  a circunferência tangente a  $C$  e  $D$  e ao eixo das abcissas. Provemos que, nesta situação,  $E$  é tangente ao eixo das abcissas em  $\frac{a+c}{b+d}$ , mediante de  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$ , e que o seu raio é  $\frac{1}{2(b+d)^2}$ . Este facto, conjugado com a observação de  $C_1$  e  $C_2$  satisfazerem a hipótese feita sobre  $C$  e  $D$ , mostrará que o mesmo se verifica para todas as circunferências construídas pelo processo que foi descrito.

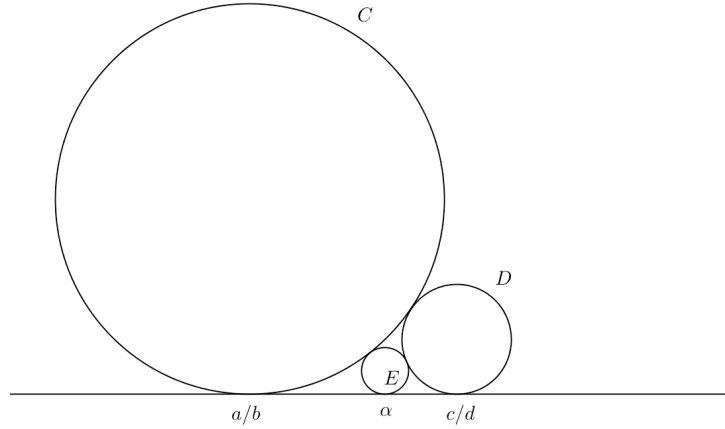


Figura 3

No que se segue, sejam  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  os raios de  $C$ ,  $D$  e  $E$ , respetivamente. Assim,

$r_1 = \frac{1}{2b^2}$  e  $r_2 = \frac{1}{2d^2}$ . Sejam  $\gamma_1 = \frac{a}{b}$  e  $\gamma_2 = \frac{c}{d}$  e  $\alpha$  a abcissa do ponto de tangência de  $E$

com o eixo das abcissas. Suponhamos ainda que  $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1$ .

Vamos começar por deduzir relações entre  $C$  e  $D$ , usando o Teorema de Pitágoras.

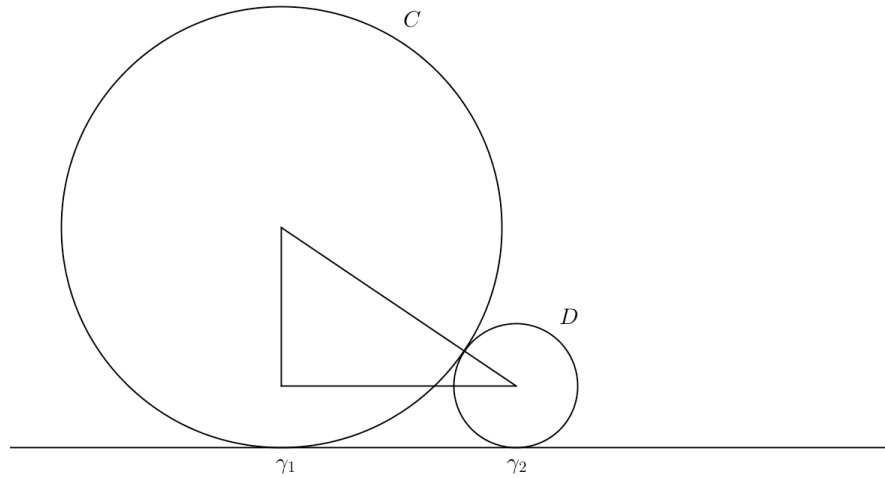
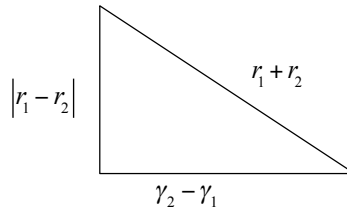


Figura 4

Destacando o triângulo retângulo assinalado, cuja hipotenusa é o segmento formado pelos centros de  $C$  e  $D$  e cujos catetos são paralelos aos eixos das coordenadas, verificamos que as medidas dos seus lados são as representadas abaixo:



Aplicando o teorema de Pitágoras, temos

$$(r_1 + r_2)^2 = (r_1 - r_2)^2 + (\gamma_2 - \gamma_1)^2.$$

Logo,

$$4r_1r_2 = (\gamma_2 - \gamma_1)^2 \quad (1)$$

e assim  $\frac{1}{b^2d^2} = \frac{(cb - ad)^2}{d^2b^2}.$

Resulta que  $|cb - ad| = 1$  e como assumimos que  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ , temos que  $cb - ad = 1$ .

Em particular, como  $c(b+d) - d(a+c) = 1$ , resulta que  $a+c$  e  $b+d$  são primos entre si.

Usando a relação análoga a (1), primeiro para as circunferências  $C$  e  $E$ , e depois para as circunferências  $D$  e  $E$ , obtemos

$$4r_1r_3 = (\alpha - \gamma_1)^2 \text{ e } 4r_2r_3 = (\alpha - \gamma_2)^2.$$

Logo,  $(\alpha - \gamma_1)^2 r_2 = (\alpha - \gamma_2)^2 r_1$ , donde se conclui que

$$(r_2 - r_1)\alpha^2 - 2(\gamma_1r_2 - \gamma_2r_1)\alpha + \gamma_1^2r_2 - \gamma_2^2r_1 = 0. \quad (2)$$

Se  $r_1 = r_2$ , então  $b = d$  e a relação unimodular implica que  $(c - a)b = 1$ . Logo,  $b = d = 1$  e

$c = a + 1$ . Como  $0 < \frac{c}{d} \leq 1$  tem de ser  $a = 0$ ,  $c = 1$ ,  $\gamma_1 = \frac{a}{b} = \frac{0}{1}$ ,  $\gamma_2 = \frac{c}{d} = \frac{1}{1}$ ,  $r_1 = \frac{1}{2} = r_2$  e

$$\alpha = \frac{1}{2} = \frac{0+1}{1+1}. \text{ Temos também } r_3 = \frac{(\alpha - \gamma_1)^2}{4r_1} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2 \times 2^2}.$$

Consideremos agora o caso  $r_1 \neq r_2$ . Então,  $b \neq d$  e fazendo as substituições  $\gamma_1 = \frac{a}{b}$ ,  $\gamma_2 = \frac{c}{d}$ ,

$r_1 = \frac{1}{2b^2}$  e  $r_2 = \frac{1}{2d^2}$  na equação (2), obtemos

$$\frac{b^2 - d^2}{2b^2 d^2} \alpha^2 - 2 \frac{ab - cd}{2b^2 d^2} \alpha + \frac{a^2 - c^2}{2b^2 d^2} = 0$$

ou, de forma equivalente,

$$\alpha^2 - 2 \frac{ab - cd}{b^2 - d^2} \alpha + \frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = 0.$$

Note-se que

$$\frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{(a - c)(a + c)}{(b - d)(b + d)} = \frac{a - c}{b - d} \times \frac{a + c}{b + d};$$

além disso,

$$\frac{a - c}{b - d} + \frac{a + c}{b + d} = \frac{(a - c)(b + d) + (a + c)(b - d)}{(b - d)(b + d)} = 2 \frac{ab - cd}{b^2 - d^2}.$$

Resulta, portanto, que as soluções de (2) são  $\frac{a+c}{b+d}$  e  $\frac{a-c}{b-d}$  e, assim,  $\alpha = \frac{a+c}{b+d}$  ou  $\alpha = \frac{a-c}{b-d}$ .

Suponhamos, por redução ao absurdo, que  $\alpha = \frac{a-c}{b-d}$ .

Em particular, como  $0 \leq \frac{a}{b} < \alpha < \frac{c}{d}$  temos  $\frac{a-c}{b-d} > 0$  e podemos supor que  $a - c > 0$  e

$b - d > 0$  (o caso  $a - c < 0$  e  $b - d < 0$  é análogo). Então, a mediana de  $\frac{a-c}{b-d}$  e  $\frac{c}{d}$  está

entre estes dois valores, o que é absurdo já que essa mediana é  $\frac{a}{b} < \alpha$ .

Resulta, portanto, que  $\alpha = \frac{a+c}{b+d}$  e resta determinar  $r_3$ :

$$r_3 = \frac{(\alpha - \gamma_1)^2}{4r_1} = \frac{\left( \frac{(a+c)b - a(b+d)}{b(b+d)} \right)^2}{\frac{4}{2b^2}} = \frac{2b^2(bc - ad)^2}{4b^2(b+d)^2} = \frac{1}{2(b+d)^2},$$

pela relação unimodular  $cb - ad = 1$ .

- ❖ Consegue imaginar qual a imagem que obteríamos se construíssemos várias circunferências aplicando o processo descrito neste capítulo?

A imagem que se poderia obter depende do número de circunferências que pretenda desenhar. A seguir, apresenta-se um possível exemplo do que se poderia obter (ver também [13]).

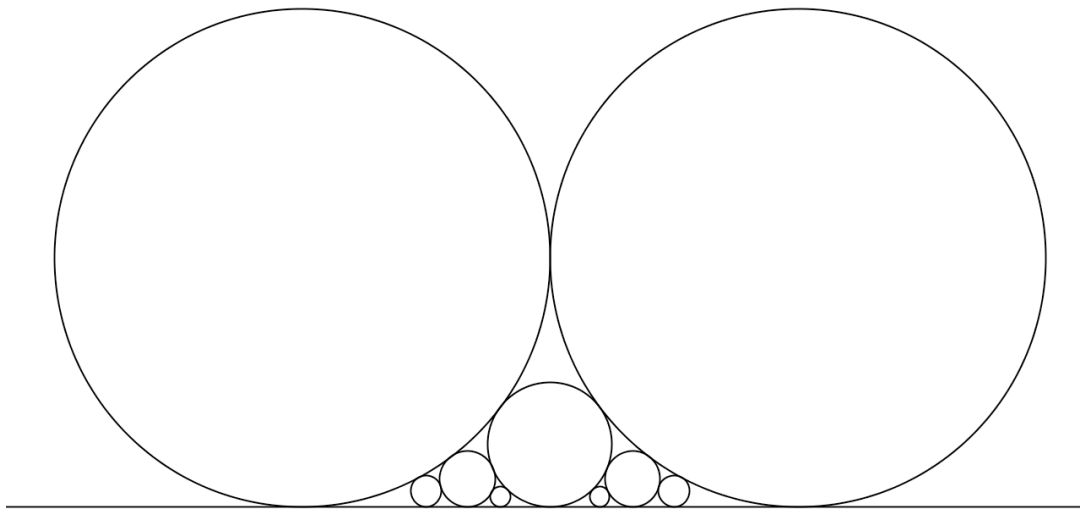


Figura 5: Círculos tangentes entre si e ao eixo das abscissas.

- ✎ Baseando-se apenas nas duas circunferências que abaixo se apresentam, obtenha uma estimativa para o valor da área da região formada pela reunião de todos os círculos que se poderiam traçar aplicando o procedimento aqui exposto.

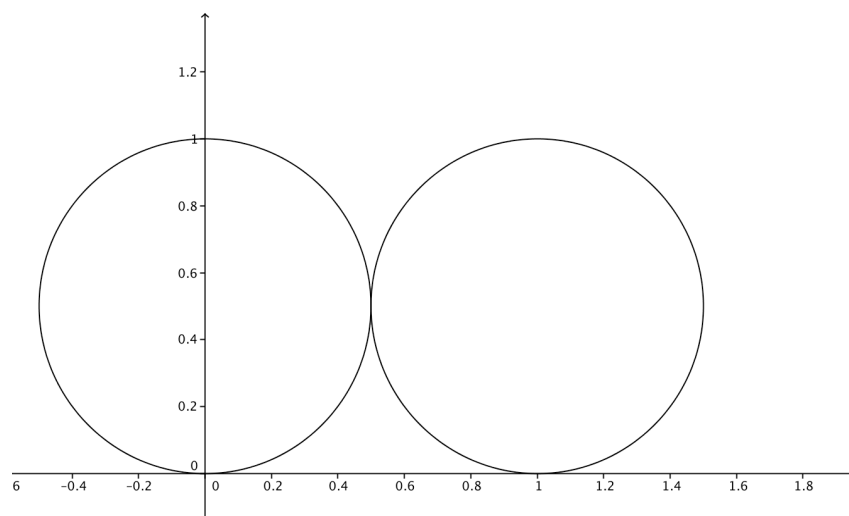


Figura 6

- ☑ Uma vez que todos os círculos traçados são tangentes ao eixo das abcissas nalgum ponto de  $[0,1]$ , resulta que a região referida está contida nas regiões planas que se assinalam na figura seguinte por  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ .

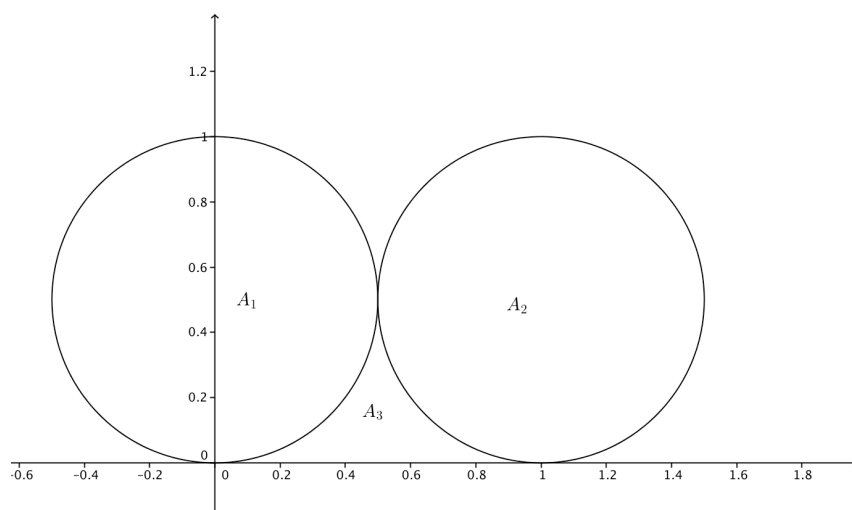


Figura 7

Procurando resolver esta questão de forma bastante simplificada, sugerimos que decomponha a imagem da seguinte forma:

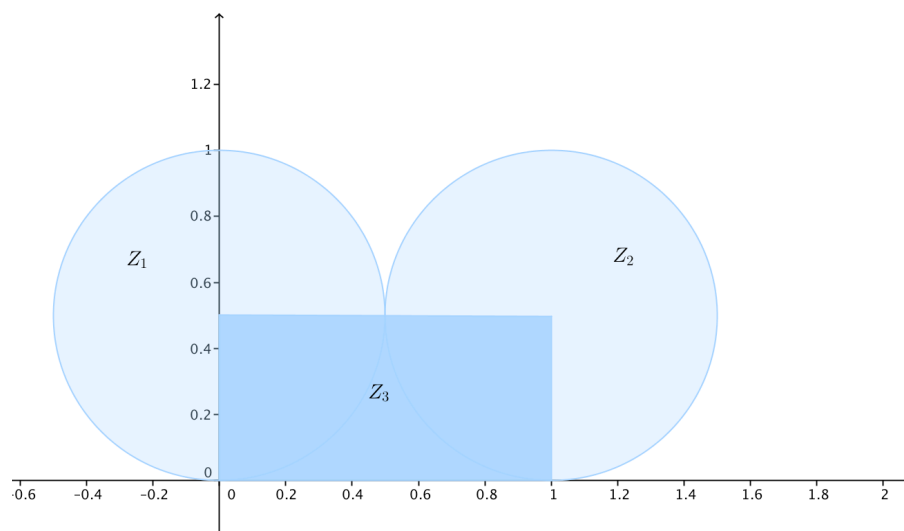


Figura 8

Começando por determinar a área de cada um dos círculos, devemos recordar que ambos têm raio 0,5. Logo, tendo em conta que  $Z_1$  e  $Z_2$  representam  $\frac{3}{4}$  de cada círculo, a área de  $Z_1$  e  $Z_2$  é  $\frac{3}{8}\pi$ .

Uma vez que  $Z_3$  representa um retângulo com dimensões 1 e 0,5, facilmente se determina que a sua área é 0,5.

Assim, a área total de  $A_1 \cup A_2 \cup A_3$  é  $\frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2} = \frac{3\pi+4}{8}$ , valor este que é um majorante da área da região formada pelo raio de todos os círculos formados pelo processo que descrevemos no início deste capítulo. De facto temos  $\frac{3\pi+4}{8} \approx 1,678$ .

Vamos agora determinar o valor exato da área formada por todas as circunferências obtidas pelo processo descrito. Para cada racional  $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$  com  $a, b$  inteiros não negativos e primos entre si, o círculo correspondente é  $C_{\frac{a}{b}}$ , com raio  $\frac{1}{2b^2}$  e centro  $\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}\right)$ . Assim,  $C_{\frac{a}{b}}$  tem área  $\frac{\pi}{4b^4}$ . Além disso, os círculos  $C_{\frac{a}{b}}$  são disjuntos dois-a-dois e para cada  $b \geq 1$  há  $\varphi(b)$  círculos com raio  $\frac{1}{2b^2}$ , exceto no caso  $b=1$  em que devemos considerar também o círculo  $C_{\frac{0}{1}}$  de área  $\frac{\pi}{4}$ . Logo, a área total destes círculos é

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{b \geq 1} \frac{\pi}{4b^4} \times \varphi(b) = \frac{\pi}{4} \left( \sum_{b \geq 1} \frac{\varphi(b)}{b^4} + 1 \right).$$

Já sabemos que este valor é limitado superiormente por  $\frac{3\pi+4}{8}$  mas para determinar o valor exato desta área é necessário obter o valor de

$$\sum_{b \geq 1} \frac{\varphi(b)}{b^4}.$$

A determinação deste valor e a sua justificação vai muito além do âmbito desta tese mas, por uma questão de completude e para aliciar a curiosidade do leitor mais ávido, indicamos que

$$\sum_{b \geq 1} \frac{\varphi(b)}{b^4} = \frac{\zeta(3)}{\zeta(4)},$$

onde  $\zeta$  é a conhecida fração de Riemann,

$$\zeta(4) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \text{ e } \zeta(3) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3} \approx 1,2021,$$

esta última designada por constante de Apéry (ver [10, Chap. II], [36] e [37]).

Logo, a área formada por todos os círculos é

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} \left( 1 + \sum_{b \geq 1} \frac{\varphi(b)}{b^4} \right) &= \frac{\pi}{4} \left( 1 + \frac{\zeta(3)}{\zeta(4)} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \frac{\pi^4 + 90\zeta(3)}{\pi^4} \\ &= \frac{\pi^4 + 90\zeta(3)}{4\pi^3} \\ &\approx 1,658.\end{aligned}$$

Observa-se que a estimativa que obtivemos inicialmente para o valor desta área difere do valor real por menos de 3 décimas, o que indica que os círculos em  $A_3$  são bastante densos.



Nas imagens seguintes estão representados alguns círculos, que atendem às características anteriormente expostas, e foram assinalados os seus centros. Imaginando unir sequencialmente esses centros usando segmentos de reta, de forma a obter um gráfico de uma função, consegue tirar algumas conclusões acerca do comportamento das curvas que se obtêm, considerando cada vez mais circunferências? Será que os centros de todas as circunferências obtidas pelo processo descrito são pontos do gráfico de alguma função contínua?

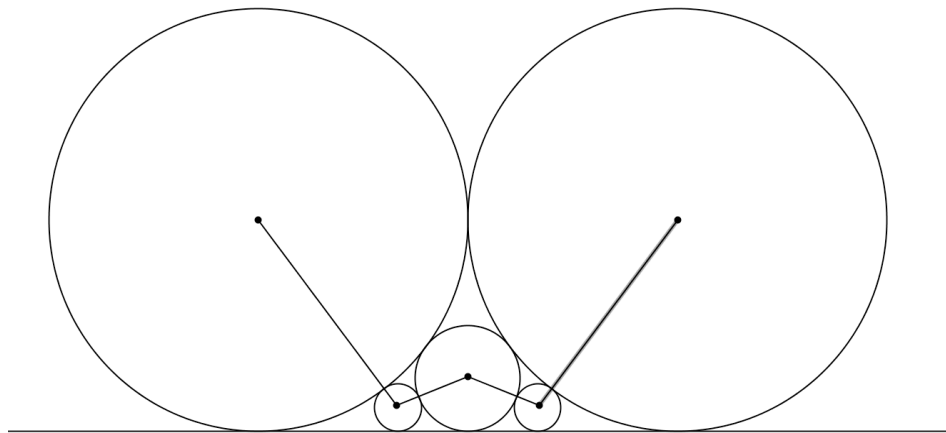


Figura 9



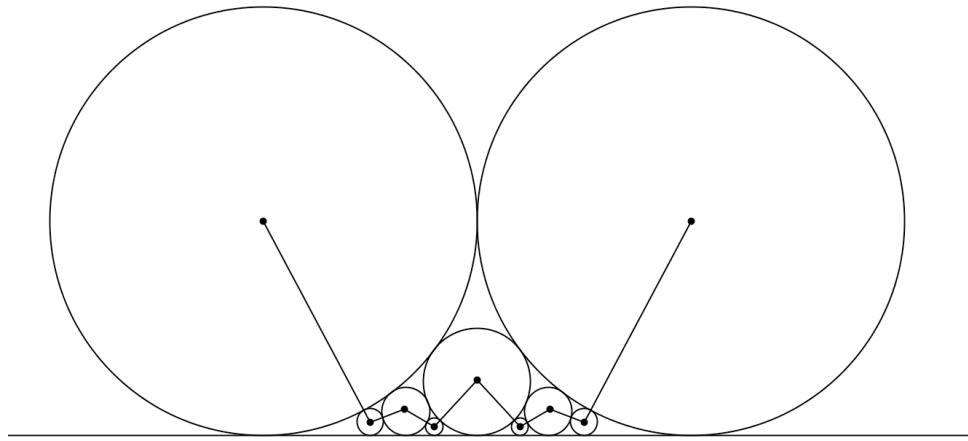


Figura 10

A definição formal de continuidade diz-nos que uma função  $f$  é contínua em  $x_0$ , quando  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

Uma definição equivalente, segundo Heine, é que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$ , para toda a sucessão  $(x_n)_{n \geq 0}$  de pontos do domínio de  $f$  e convergente para  $a$ .

Seja  $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$ , com  $a, b \geq 0$  e  $m.d.c.(a, b) = 1$ .

O raio da circunferência correspondente ao ponto de abscissa  $\frac{a}{b}$  é  $\frac{1}{2b^2}$ . Logo, os centros das circunferências que se obtêm pelo processo descrito forma o conjunto  $\left\{ \left( \frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2} \right) : 0 \leq a \leq b \text{ e } m.d.c.(a, b) = 1 \right\}$ . Vamos ver que a função  $f: [0, 1] \cap \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$  que tem como gráfico este conjunto não é contínua em nenhum dos pontos do seu domínio.

Comecemos por analisar um caso simples. Para tal, vejamos que a função não é contínua para  $x = 1$ .

Este valor está associado à circunferência que é tangente ao eixo das abcissas no ponto de abscissa 1 e, atendendo ao que foi explanado neste capítulo, podemos afirmar que o raio dessa circunferência é  $\frac{1}{2}$ . Neste caso, pretendemos mostrar que existe uma sucessão  $(u_n)_{n \geq 1}$  com valores em  $[0, 1] \cap \mathcal{Q}$  convergente para 1, mas que  $f(u_n)$  não

converge para  $f(1)$ . Tomemos, para o efeito,  $u_n = \frac{n-1}{n}$ , com  $n \geq 1$ . Notemos que  $n-1$  e  $n$  são primos entre si. Temos então que  $f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2}$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n^2} = 0$ , que é diferente de  $f(1) = \frac{1}{2}$ . Logo, a função  $f$  não é contínua em 1.

Vamos provar, de seguida, que a função não é contínua em  $\frac{a}{b}$ , generalizando o exemplo concreto que acabámos de referir, onde  $\frac{a}{b} \in [0,1] \cap \mathcal{Q}$  e  $\frac{a}{b} \neq 1$ . Supomos ainda que os inteiros  $a$  e  $b$  são primos entre si e  $0 \leq a < b$ .

Seja  $\{p_n\}_{n \geq 1}$  uma enumeração crescente dos primos maiores que  $b$  e consideremos a sucessão  $\left\{\frac{a}{b} + \frac{1}{p_n}\right\}_{n \geq 1}$ , convergente para  $\frac{a}{b}$ .

- Em primeiro lugar, observemos que  $\frac{a}{b} + \frac{1}{p_n} = \frac{ap_n + b}{bp_n}$ , e provemos que  $ap_n + b$  e  $bp_n$  são primos entre si, ou seja, que a fração  $\frac{ap_n + b}{bp_n}$  é irredutível.

De facto, se existisse um divisor primo,  $d$ , de  $ap_n + b$  e  $bp_n$ , então:

- se  $d$  divide  $b$ , resulta que  $d \leq b$  e, portanto,  $d \neq p_n$  porque  $p_n > b$ ; logo  $d$  divide  $a$ , o que é absurdo;
- se  $d$  não divide  $b$ , então  $d = p_n$  e  $p_n$  divide  $b$ , o que é absurdo pois  $p_n > b$ .

Nesta situação, verificamos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{ap_n + b}{bp_n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2b^2 p_n^2} = 0$ . No entanto,  $f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{2b^2} \neq 0$ .

Logo, a função  $f$  não é contínua em  $\frac{a}{b}$ .

Como também foi visto que a função  $f$  não é contínua em 1, podemos concluir que  $f$  não é contínua em nenhum ponto do seu domínio.

## Capítulo 3: Teoria de Grafos

A Teoria dos Grafos é atualmente uma das áreas mais importantes da matemática discreta sendo usada no estudo das relações entre os objetos de um determinado conjunto (ver [31]). A sua criação é atribuída a Leonhard Euler, conhecido matemático suíço, por resolver o problema das pontes de Königsberg, em 1736 (ver [34] e [35]). Euler fez várias descobertas na área da matemática, particularmente na área do cálculo e dos grafos. Também fez muitas contribuições para a matemática moderna ao nível da terminologia e notação, em especial na análise matemática, como por exemplo, a noção de função. Tornou-se, ainda, célebre por tudo o que desenvolveu na área da mecânica, ótica e astronomia. Euler é considerado um dos matemáticos mais notáveis do século XVIII (ver [32] e [33]).

Ao longo deste capítulo, far-se-á uma exposição global de grafos, dando especial importância às árvores, uma vez que os dois capítulos seguintes têm por base este conceito. Para obter mais informação sobre grafos pode consultar [5] e [35].

A Teoria dos Grafos tem sido aplicada a muitas áreas como informática, economia, sociologia, genética, entre outras, na medida em que um grafo é considerado o modelo matemático ideal para o estudo de determinadas relações entre objetos discretos.

- ❖ Já tinha ouvido falar em grafos? Acha que poderá já ter encontrado grafos em situações do seu dia-a-dia?

Se observar a imagem que em baixo se apresenta, perceberá tratar-se, neste caso, do mapa do metro do Porto, tão vulgarmente conhecido para quem usa este meio de transporte.



Fonte: [http://lounge.obviousmag.org/risco/2012/08/20/metro/Rede\\_metro\\_do\\_porto.png](http://lounge.obviousmag.org/risco/2012/08/20/metro/Rede_metro_do_porto.png)

Figura 11: Mapa do Metro da cidade do Porto.

**Definição:**

Um grafo é um par ordenado  $G = (V, E)$ , onde:

- $V$  é um conjunto finito cujos elementos são denominados por vértices;
- $E$  é um conjunto de elementos do tipo  $\{x, y\}$ , chamados arestas, em que  $x$  e  $y$  são dois vértices diferentes.

Considerando a aresta  $\alpha = \{x, y\}$  dizemos que:

- $x$  e  $y$  são vértices adjacentes e vizinhos;
- $x$  e  $y$  são as extremidades de  $\alpha$ ;
- $x$  e  $\alpha$  são incidentes, bem como  $y$  e  $\alpha$ .

É usual representar um grafo no plano de forma a que os vértices correspondam a pontos e arestas a curvas entre os respectivos pontos.

A figura seguinte é um exemplo de uma representação do grafo  $G = (V, E)$ ,  $V = \{x, y, z, w\}$  e  $E = \{\{x, y\}, \{x, w\}, \{w, z\}, \{w, y\}, \{z, y\}\}$ .

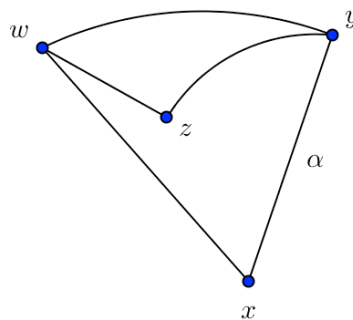


Figura 12: Exemplo de um grafo.

Entende-se por grau ou valência de um vértice, o número de arestas que são incidentes nesse vértice. Com base na representação anterior, podemos afirmar que  $x$  tem grau 2 e  $y$  tem grau 3.

- ❖ Acha que poderá haver alguma relação entre o número de arestas de um grafo e os graus dos seus vértices?

✍️ Faça algumas representações de grafos e tente tirar conclusões.

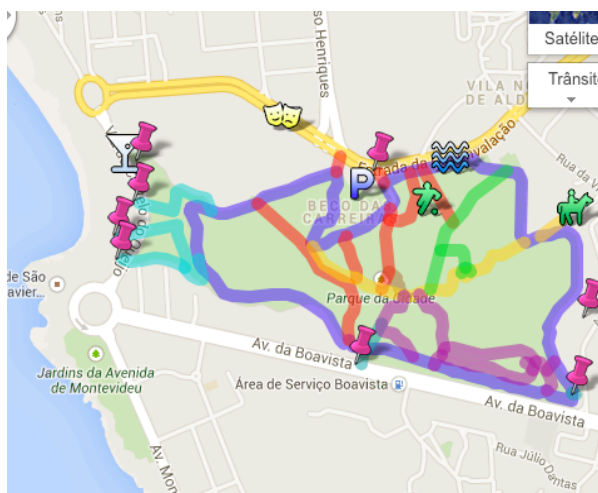
- ☑ Em todos os exemplos que considerou deverá ter chegado à conclusão que a soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas. Simbolicamente,

$$\sum_{v \in V} \text{grau}(v) = 2|E|.$$

Para que fique verdadeiramente convencido que esta relação se verifica para qualquer grafo  $G$  apresentamos, de seguida, a respetiva prova.

Considerando um grafo  $G$  sabe-se, por um lado, que a soma dos graus dos seus vértices é dada pelo número total de incidências em cada um dos seus vértices; por outro lado, cada aresta contribui com 2 para a soma dos graus dos vértices. Assim se prova que a soma dos graus dos vértices de um determinado grafo é igual ao dobro do número de arestas que constituem esse mesmo grafo, ficando provada a relação anterior. □

- ❖ Imagine que os professores de Educação Física de uma escola vão organizar uma prova de corta-mato no Parque da Cidade do Porto. Para isso, ao fazerem uma pesquisa na internet para conhecerem o mapa do referido parque, deram conta que havia muitas possibilidades para definirem o trajeto da corrida.



Fonte: Google Maps

Figura 13: Mapa do Parque da Cidade do Porto.

Na reunião de preparação da atividade, os professores do grupo de Educação Física usaram termos como passeio, atalho, caminho, circuito e ciclo para darem ideias acerca do trajeto a definir. Num grafo, estes termos têm significados próprios e distintos.

Ao tentar refletir sobre o significado de cada um dos termos anteriores, pode acontecer que veja diferença no significado de alguns mas não em todos. Na verdade, para a Teoria dos Grafos, cada um destes termos tem um significado diferente.

*Definição:*

Dado um grafo  $G$ , um passeio em  $G$  é uma sequência de vértices tal que vértices consecutivos são adjacentes. Se o primeiro vértice do passeio for  $u$  e o último vértice for  $v$  dizemos que é um passeio de  $u$  a  $v$ ; se  $u = v$  dizemos também que é um passeio fechado.

Num passeio, identificamos os vértices consecutivos  $x$  e  $y$  com a aresta correspondente e assim podemos falar das arestas do passeio.

*Definição:*

Dado um grafo  $G$ , um caminho é um passeio em que os vértices são todos distintos.

Um ciclo num grafo  $G$  é um passeio fechado com pelo menos 4 vértices e cujos vértices são todos distintos, exceto o último, que coincide com o vértice inicial.

Uma designação importante para o que pretendemos expor aqui neste capítulo, o conceito de árvore, é a noção de grafo conexo. Tendo em conta algumas das definições anteriores, podemos definir grafo conexo da seguinte forma:

Um grafo  $G$  diz-se conexo se, dados dois quaisquer vértices,  $x$  e  $y$  de  $G$ , existe um passeio entre eles ou, o que é equivalente, existe um caminho entre eles. Caso contrário o grafo diz-se desconexo.

- ❖ Qual o número mínimo de arestas que serão necessárias para que um grafo seja conexo, fixado o número de vértices do grafo?

Esta é uma pergunta pertinente para o estudo de situações que envolvam custos como, por exemplo, quando se pretende estudar o custo de instalação de uma rede de gás numa urbanização gastando, para isso, o mínimo possível.

Na teoria dos grafos, uma forma de facilitar este estudo é usando o que se designa por árvores, tipo de grafo que passaremos, a partir daqui, a analisar com mais pormenor.

Imagine que pretendemos instalar uma rede de gás numa urbanização constituída por 7 casas. Várias são as formas de podermos representar essa situação, apostando em soluções de custo mínimo, sendo duas dessas formas as que a seguir se apresentam.

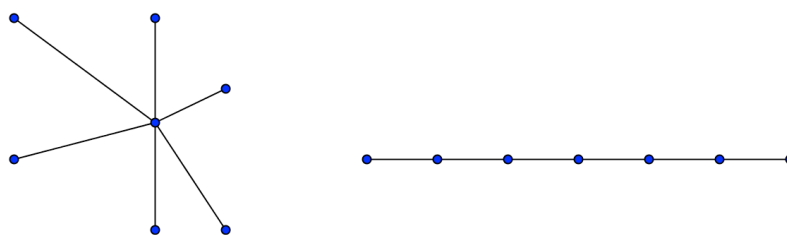


Figura 14: Duas árvores com 7 vértices.

Observe que em ambas as representações foram usadas 6 arestas.

- ❖ Será que podemos generalizar esta última relação? Será que não podemos resolver o problema usando menos arestas do que as que usámos nos dois exemplos anteriores?

Antes de avançarmos com esta questão, devemos ter em conta a noção de ponte.

*Definição:*

Num grafo conexo, uma ponte ou aresta de corte é uma aresta que, quando retirada, torna o grafo desconexo. Designemos por  $G - \alpha$  o grafo obtido de  $G$  por eliminação da aresta  $\alpha$ .

Seja  $G$  um grafo conexo com  $n$  vértices. Dada uma aresta  $\alpha$  de  $G$ , ou  $\alpha$  não é uma ponte e assim  $G - \alpha$  é conexo, ou  $G - \alpha$  se decompõe na reunião de dois grafos conexos, um dos quais contém uma das extremidades de  $\alpha$  e o outro contém a outra extremidade de  $\alpha$ .

Do mesmo modo, se considerarmos um conjunto de arestas  $A$  de  $G$ , então ao retirar a  $G$  todas as arestas de  $A$  obtemos uma decomposição de  $G$  em, no máximo,  $|A| + 1$  grafos conexos.

Assim, se  $A = E$ , obtemos  $|V|$  vértices isolados e o que foi dito acima implica que  $|V| \leq |E| + 1$ .

Vejamos um exemplo:

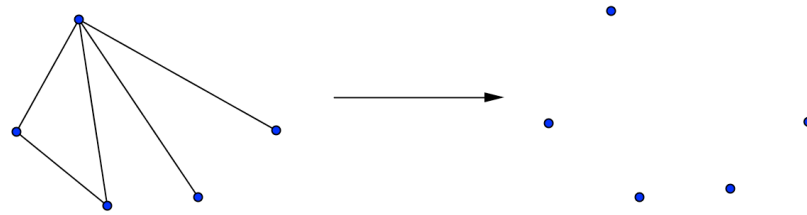


Figura 15

Em consequência,  $|E| \geq |V| - 1$ .

Assim,

- (a) Num grafo conexo  $G$  com  $n$  vértices e  $e$  arestas tem-se que  $e \geq n - 1$ .
- (b) Para cada  $n \geq 1$  existem grafos conexos com  $n$  vértices e  $n - 1$  arestas. Em qualquer grafo conexo com esta relação entre número de vértices e número de arestas, todas as arestas são pontes.

Apenas interessa aprofundarmos a última parte da afirmação (b), dado que tudo o resto decorre do que foi abordado até aqui.

Para isso, seja  $G$  um grafo conexo com  $n$  vértices e  $n - 1$  arestas. Dada uma aresta  $\alpha$  de  $G$ , o grafo  $G - \alpha$  tem  $n$  vértices e  $n - 2$  arestas, logo é desconexo por (a). Assim, todas as arestas de  $G$  são pontes.

- ❖ Por que razão se tem vindo a dar tanta importância aos grafos conexos com o menor número de arestas possível?

**Definição:**

Um grafo  $G$  diz-se uma *árvore* se for conexo e se todas as suas arestas forem pontes, ou seja, considerando  $G$  conexo,  $G - \alpha$  é desconexo, qualquer que seja  $\alpha$ , aresta de  $G$ .

Vejamos algumas representações de árvores:

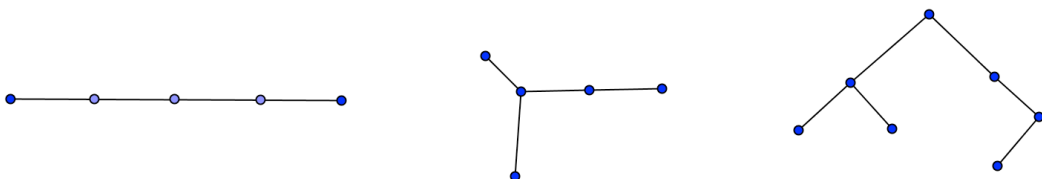


Figura 16: Algumas árvores.



Após o que mostrámos anteriormente, podemos garantir que numa árvore  $|E| \geq |V| - 1$ .

*Teorema:*

Um grafo conexo com  $n$  vértices é uma árvore se e só se tem exactamente  $n - 1$  arestas.

*Prova:*

Se  $G$  for conexo e  $|E| = n - 1$ , já observamos que todas as arestas de  $G$  são pontes, logo  $G$  é uma árvore.

Suponhamos agora que  $G$  é uma árvore com  $n \geq 1$  vértices.

Provaremos por indução sobre  $n$  que  $G$  tem  $n - 1$  arestas. Se  $n = 1$  então claramente  $G$  não pode ter arestas, o que verifica a nossa afirmação no caso  $n = 1$ . Suponhamos agora que  $n > 1$ . Seja  $\alpha$  uma aresta de  $G$ . Como  $G$  é árvore,  $\alpha$  é ponte e assim  $G - \alpha$  é formado por dois grafos conexos  $G_1$  e  $G_2$ , digamos que  $G_1$  tem  $k$  vértices e que  $G_2$  tem  $l$  vértices, com  $k + l = n$ . É fácil de concluir que todas as arestas de  $G_1$  e  $G_2$  são pontes, logo  $G_1$  e  $G_2$  são árvores. Por hipótese de indução,  $G_1$  tem  $k - 1$  arestas e  $G_2$  tem  $l - 1$  arestas.

Logo,  $G$  tem  $(k - 1) + (l - 1) + 1 = k + l - 1 = n - 1$  arestas, o que prova o passo indutivo e o Teorema.  $\square$

Suponhamos que a aresta  $\alpha$  do grafo conexo  $G$  pertence a algum ciclo deste grafo. Então, ao retirar  $\alpha$  a esse ciclo, obtemos ainda um caminho entre as extremidades de  $\alpha$ , o que implica que  $G - \alpha$  é ainda conexo e que  $\alpha$  não é ponte. É possível argumentar que o recíproco desta afirmação é também válido: se  $\alpha$  não é ponte então  $\alpha$  pertence a algum ciclo de  $G$ . Esta observação permite estabelecer a seguinte caracterização alternativa das árvores.

*Teorema:*

Seja  $G$  um grafo conexo. Então  $G$  é uma árvore se e só se  $G$  não contiver ciclos.

O próximo resultado, que apresentamos sem demonstração, baseia-se na seguinte ideia: se existirem dois caminhos distintos entre dois vértices dados, então o passeio fechado que se obtém percorrendo o primeiro caminho e depois o segundo caminho por ordem inversa, contém necessariamente um ciclo.

*Teorema:*

Um grafo  $G$  é uma árvore se e só se, para quaisquer dois vértices distintos  $x$  e  $y$ , existir um único caminho em  $G$  de  $x$  a  $y$ .

Terminamos esta exposição com um resultado básico mas surpreendente sobre árvores.

*Teorema:*

Em qualquer árvore com  $n \geq 2$  vértices, há pelo menos dois vértices de grau 1.

*Prova:*

Seja  $G$  uma árvore com  $n \geq 2$  vértices e suponhamos, por redução ao absurdo, que a conclusão do Teorema é falsa. Então há duas hipóteses:

- (a)  $G$  não tem vértices de grau 1:
- (b)  $G$  tem exatamente um vértice de grau 1.

Já foi visto que  $G$  tem  $n-1$  arestas e que  $\sum_{v \in V} \text{grau}(v) = 2|E| = 2n-2$ . Além disso, como  $G$

é conexo e  $n \geq 2$ , todos os vértices têm grau não inferior a 1.

No caso (a) temos  $\text{grau}(v) \geq 2$  para todo o  $v \in V$  e assim  $2n-2 = 2|E| = \sum_{v \in V} \text{grau}(v) \geq 2n$ , o

que é absurdo. No caso (b) temos  $\text{grau}(v) \geq 2$  para todo o  $v \in V \setminus \{v_0\}$  e  $\text{grau}(v_0) = 1$ .

Logo,

$$2n-2 = 2|E| = \sum_{v \in V} \text{grau}(v) \geq 1 + 2(n-1) = 2n-1,$$

o que também é absurdo.

Fica assim visto que (a) e (b) resultam em absurdos, o que prova a veracidade do Teorema.  $\square$

*Definição:*

Num grafo  $G$ , designamos os vértices de grau 1 por folhas de  $G$ .

O resultado anterior mostra que toda a árvore com pelo menos 2 vértices tem pelo menos 2 folhas.



O seguinte exemplo é tido como um problema clássico na Teoria dos Grafos.

O problema é baseado na cidade Königsberg, na Rússia, onde uma ilha estava ligada à cidade principal por 7 pontes. Consta-se que entre os habitantes da altura se discutia a possibilidade de se atravessar todas as pontes, sem passar duas vezes pela mesma.

Em 1736, Euler deu resposta a este problema.

O que pensará o leitor acerca deste problema? Antes de fazer pesquisa sobre este assunto, tente ver a possibilidade de atravessar todas as pontes, sem passar por cada uma delas mais do que uma vez.

Em baixo encontra-se uma imagem da situação descrita.



Fonte: <http://rosalind.info/glossary/eulerian-cycle/>

**Figura 17:** Planta da cidade de Königsberg.

## Capítulo 4: Árvore de Stern-Brocot

A árvore que vamos descrever neste capítulo remonta a meados do século XIV e foi descoberta por Stern e por Brocot, de forma independente. É uma árvore que permite enumerar todos os números racionais positivos (ver [4], [9], [16] e [17]).

Na descrição que a seguir se apresenta, teremos oportunidade de referir mais especificamente quem foram Moritz Stern e Achille Brocot e de mostrar como se deve proceder para conseguir essa enumeração dos racionais positivos.

Já terá ouvido e estudado, certamente, algo relacionado com a enumeração dos números racionais, ou seja, algum tipo de algoritmo que permita gerar todos os números racionais. Várias poderão ser as formas de fazer essa enumeração.

- ❖ Conhece algum processo que faça surgir cada racional positivo uma única vez e na forma de fração irredutível?

Quando, na escola, se estudam conjuntos numéricos, a intuição dos alunos fá-los acreditar que não é possível enumerar nenhum dos conjuntos estudados, por serem infinitos. No caso de se considerar um conjunto finito, o aluno procede intuitivamente à contagem dos elementos que o constituem. O problema surge quando o conjunto considerado é infinito.

Os conjuntos infinitos podem classificar-se por infinitos numeráveis ou infinitos não numeráveis.

- ❖ O que é que significa um conjunto ter cinco elementos?

Se um conjunto tem cinco elementos significa que é possível enumerar os seus elementos de 1 até 5. De forma mais formal, um conjunto tem cinco elementos se existir uma bijeção entre esse conjunto e o conjunto  $\{1,2,3,4,5\}$  dos naturais entre 1 e 5.

Recorde-se que uma função  $f : X \rightarrow Y$  é:

- injetiva, se  $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ , para quaisquer  $a, b \in X$ ;
- sobrejetiva se  $f(X) = Y$ .

Se  $f$  é injetiva e sobrejetiva, então  $f$  é bijetiva.

De um modo geral, diz-se que um conjunto  $X$  tem  $n$  elementos se existir uma bijeção entre  $X$  e o conjunto dos naturais entre 1 e  $n$ .

*Definição:*

Dizemos que dois conjuntos  $X$  e  $Y$  têm o mesmo número de elementos se existe uma bijeção entre  $X$  e  $Y$ . Dizemos também que  $X$  e  $Y$  são equipotentes ou equicardinais.

De seguida, generalizamos esta noção para conjuntos infinitos.

*Definição:*

Um conjunto infinito diz-se numerável se existe uma função bijetiva entre o conjunto dos números naturais e esse conjunto. Caso contrário diz-se infinito não numerável.

Resulta desta definição que se  $X$  for um subconjunto de  $\mathbb{N}$ , então ou  $X$  é finito ou  $X$  é infinito numerável (ver por exemplo [8], proposição 2.5.1)).

- ❖ Por exemplo, sabia que o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números pares positivos têm o mesmo número de elementos?

Se refletir um pouco acerca desta questão, entenderá que é possível estabelecer uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjuntos dos números pares, como se ilustra na tabela seguinte.

$n$	$2n$
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
...	...

Tabela 2

Estes dois conjuntos dizem-se, por isso, equipotentes ou com a mesma cardinalidade.

- ❖ Será que o conjunto dos números racionais também é numerável?

É bem conhecido que a resposta a esta questão é afirmativa mas, neste capítulo, iremos abordar uma forma de enumerar os racionais com propriedades particularmente interessantes.

Começamos por recordar a prova clássica da que o conjunto dos números racionais é numerável (ver [19]). Para isso, vamos estabelecer uma correspondência entre números naturais e pares de números naturais. Estes últimos serão tidos como pontos no plano com coordenadas naturais, como se representa na figura abaixo.

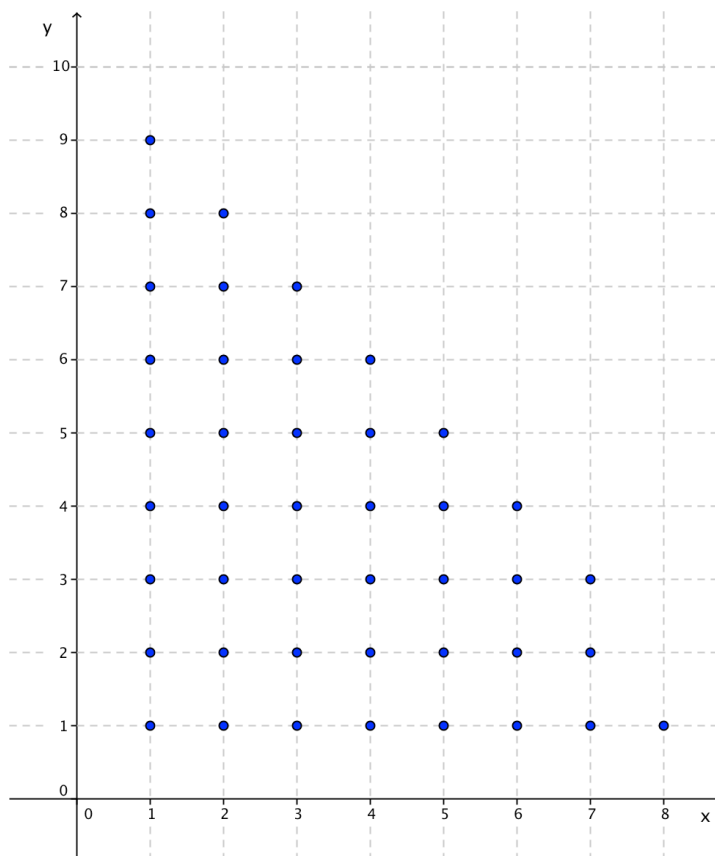


Figura 18

Consideremos, para o efeito, que cada coordenada assinalada  $(m, n)$  representa uma fração  $\frac{m}{n}$ .

- ❖ Existirá alguma forma de conseguirmos enumerar todas as frações  $\frac{m}{n}$  representadas no referencial anterior?

Com base nesse referencial, se tentarmos enumerar os racionais por linhas, damos conta que nunca conseguiremos passar para a linha seguinte, uma vez que o número de elementos de cada linha é infinito.

De outra forma, se fizermos a contagem seguindo a ordem das setas que ilustram o referencial seguinte, verificamos que existe uma forma de descrevermos todos os racionais apresentados.

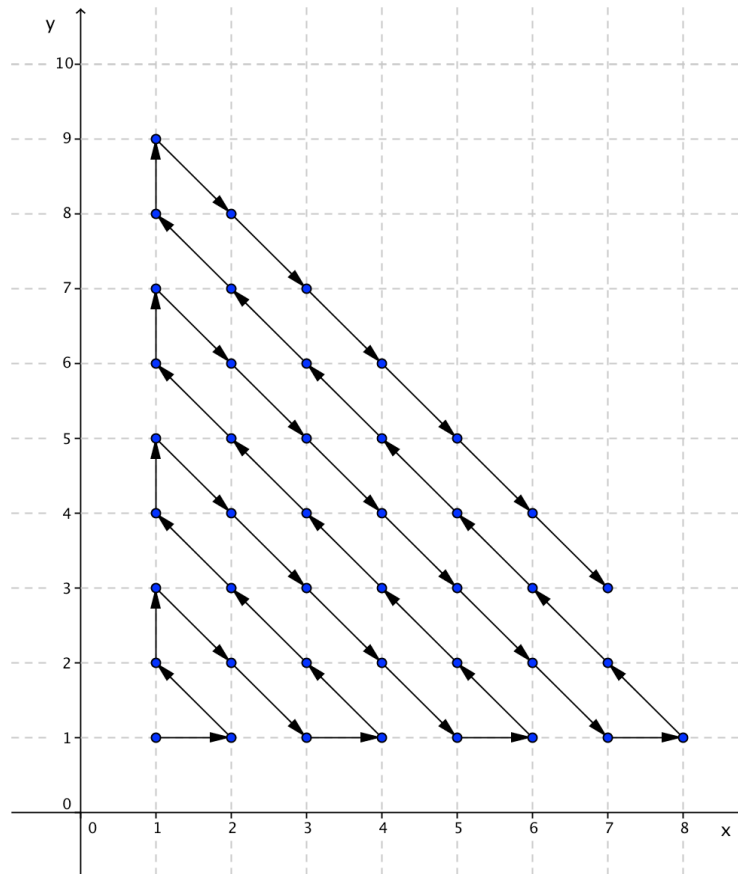


Figura 19: Enumeração de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

Isto permite-nos concluir que existe uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos pares de naturais. Como consequência, podemos ainda afirmar que existe uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos racionais positivos, como vamos ver de seguida.

Provámos que existe uma bijeção  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , ou seja, entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos pares de naturais.

Podemos identificar o conjunto dos racionais positivos como o subconjunto do conjunto dos pares de naturais que são primos entre si. Esta identificação permite escrever  $\mathbb{Q}^+ \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

Seja  $X = \{i \in \mathbb{N} : f(i) \in \mathbb{Q}^+\} = \{i \in \mathbb{N} : f(i) = (a, b) \text{ com } a, b \in \mathbb{N} \text{ e } m.d.c.(a, b) = 1\}$ .

Temos então uma bijeção  $f|_X : X \longrightarrow \mathbb{Q}^+$ .

Como  $X$  não é finito, porque  $\mathbb{Q}^+$  também não é, então  $X$  é numerável. Logo, existe uma bijeção  $g : \mathbb{N} \rightarrow X$ .

A composta  $h = f \circ g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$  é uma bijeção entre  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{Q}^+$ , o que mostra que  $\mathbb{Q}^+$  é numerável.

Provámos, assim, que existe uma enumeração dos racionais positivos.

❖ Será possível fazer uma enumeração de todos os racionais?

Tal como vimos anteriormente,  $\mathcal{Q}^+$  é numerável porque existe uma bijeção  $h$  entre  $\mathbb{N}$  e  $\mathcal{Q}^+$ .

Considerando a função  $H$  definida por

$$H : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{Q}$$

$$i \mapsto \begin{cases} h(k) & , i = 2k \\ -h(k) & , i = 2k + 1 \\ 0 & , i = 1 \end{cases}, \text{ para } k \geq 1$$

vemos também que  $\mathcal{Q}$  é um conjunto numerável, uma vez que  $H$  é bijetiva.

A árvore de Stern-Brocot, apresentada neste capítulo, revela uma forma diferente de construir uma enumeração dos racionais positivos, estabelecendo uma bijeção explícita entre  $\mathbb{N}$  e  $\mathcal{Q}^+$ , que é obtida de forma construtiva por um algoritmo.

Se explorar um pouco acerca da origem da referida árvore encontrará algo curioso. A designação da árvore, Stern-Brocot, é a conjugação dos dois nomes relacionados com a sua descoberta e aplicação. O mais extraordinário é que essa descoberta foi feita de forma independente, ainda que por volta da mesma altura: Moritz Stern em 1858 e Achille Brocot em 1861.

Estará a pensar, neste momento, que nos referimos a grandes matemáticos... Moritz Abraham Stern, de origem alemã e oriundo de famílias humildes, foi o primeiro matemático judaico a exercer funções de professor titular na Universidade de Gotinga, na Alemanha. Começou por descrever a árvore e posteriormente explicou a sua relação com outros temas na área da teoria dos números (ver [20], [23] e [24]).

Além da árvore que iremos abordar, Stern deu outros contributos na área da matemática. Ele possivelmente terá sido o primeiro a aperceber-se do talento de Bernhard Riemann para a matemática. Stern terá contribuído para a prova do teorema da reciprocidade quadrática, por Ferdinand Eisenstein. Um outro tema que lhe terá suscitado interesse, relaciona-se com os números primos que não podem ser expressos como soma de um primo menor com o dobro de um quadrado perfeito, atualmente designados por Primos de Stern (ver [25]).

Achille Brocot, por sua vez, era um famoso relojoeiro francês e simplesmente um matemático amador (ver [21]).



- ❖ Que relação terá a relojoaria com a matemática? (A propósito de matemática e relojoaria ver por exemplo [7], embora o tema deste artigo não esteja relacionado com esta tese.) Por que razão estará o nome de um relojoeiro associado a uma descoberta matemática?

Como tem conhecimento, os relógios mais antigos funcionavam por um processo associado a roldanas. Esse mecanismo era estudado por engenheiros, que calculavam o número de dentes necessários em cada roldana de forma a garantir que o sistema funcionasse de forma eficaz, nomeadamente ao nível da velocidade de movimento das roldanas.

É aí que entra a teoria dos números associada à descoberta de Brocot, cuja visão foi meramente prática. Ele dedicou a sua atenção ao mecanismo dos relógios, para calcular a melhor razão entre as roldanas acabando por criar um algoritmo que o fez chegar à referida árvore (ver [18] e [22]).

Veremos que esta árvore goza de várias propriedades interessantes.

- ❖ Está recordado da definição de árvore?

Como foi visto no Capítulo 3, uma árvore é um grafo conexo cujas arestas são todas pontes, ou seja, se retirada qualquer aresta do grafo este se torna desconexo. Foi também visto nesse capítulo que também é possível definir uma árvore como sendo um grafo conexo sem ciclos e que uma árvore com  $n \geq 2$  vértices tem exatamente  $n-1$  arestas e pelo menos dois vértices de grau 1. Estes vértices designam-se por folhas e os restantes designam-se por vértices interiores.

Se pretendermos associar a cada número racional positivo um vértice da árvore de Stern-Brocot seremos forçados a considerar uma árvore como um conjunto numerável de vértices. Nesta situação não é garantida a existência de folhas e veremos que a árvore de Stern-Brocot não terá folhas, o que não contradiz a afirmação que fizemos acima, tendo em conta tratar-se de uma árvore infinita.

Para escrevermos os números racionais positivos segundo o processo de Stern-Brocot, devemos começar por considerar os “extremos” de  $\mathcal{Q}^+$ : 0 e  $+\infty$ . Identifiquemos 0 com a fração  $\frac{0}{1}$  e  $+\infty$  com o símbolo  $\frac{1}{0}$ , visto como uma fração de numerador 1 e denominador 0.

De seguida, tendo em conta que a árvore vai ser construída faseadamente, vai-se determinando, em cada passo, a fração mediante de cada par de frações consecutivas obtidas no passo anterior.

O que se obtém é algo do género do que a seguir se apresenta.

$SB_{-1}$	$\frac{0}{1}$																	$\frac{1}{0}$
$SB_0$	$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{1}$									$\frac{1}{0}$
$SB_1$	$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{1}$			$\frac{2}{1}$						$\frac{1}{0}$
$SB_2$	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{1}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{2}{1}$		$\frac{3}{1}$		$\frac{1}{0}$	
$SB_3$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{1}{0}$	
$SB_4$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{1}{0}$

Figura 20

❖ Como construir uma árvore com base nesta tabela?

Para uma melhor leitura, designaremos o conjunto de todas as frações obtidas até ao passo  $n$ , para  $n \geq -1$ , por  $SB_n$ .

Para o efeito tomaremos:

$$SB_{-1} = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{0} \right\},$$

$$SB_0 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0} \right\},$$

...

Recursivamente, definimos

$$SB_{n+1} = SB_n \cup \left\{ \text{medianes de cada par de frações consecutivas de } SB_n \right\}.$$

Note-se que,

$$|SB_{-1}| = 2,$$

$$|SB_0| = 3,$$

$|SB_{n+1}| = |SB_n| + |SB_n| - 1 = 2|SB_n| - 1$ , uma vez que o número de frações existentes numa determinada ordem corresponde ao número de frações que já existiam na ordem anterior, acrescido do número de medianas adicionadas.

Logo,

$|SB_n| = 2^{n+1} + 1$ , para todo o  $n \geq -1$ , resultado que se prova do seguinte modo, por indução:

- Para  $n = -1$ , temos que:

$$|SB_{-1}| = \left| \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{0} \right\} \right| = 2 = 2^{-1+1} + 1.$$

- Supondo que a igualdade que queremos provar se verifica para determinado  $n \geq -1$ , provemos que também se verifica para  $n+1$ :

$$|SB_{n+1}| = 2|SB_n| - 1 = 2(2^{n+1} + 1) - 1 = 2^{n+2} + 2 - 1 = 2^{n+2} + 1.$$

Fica assim estabelecida a igualdade enunciada.

Iremos destacar na árvore a fração  $\frac{1}{1}$ , que será designada por raiz da árvore.

Analisando a tabela anterior a partir dessa raiz, começemos por destacar a primeira vez que cada fração surge.

De seguida, cada fração de  $SB_n$  (exceto  $\frac{0}{1}$  e  $\frac{1}{0}$ ), vai ser usada para calcular duas novas medianas pertencentes a  $SB_{n+1}$ . Isso deverá ser assinalado com uma aresta entre essa fração e as duas frações correspondentes de  $SB_{n+1}$ , como é ilustrado na tabela seguinte.

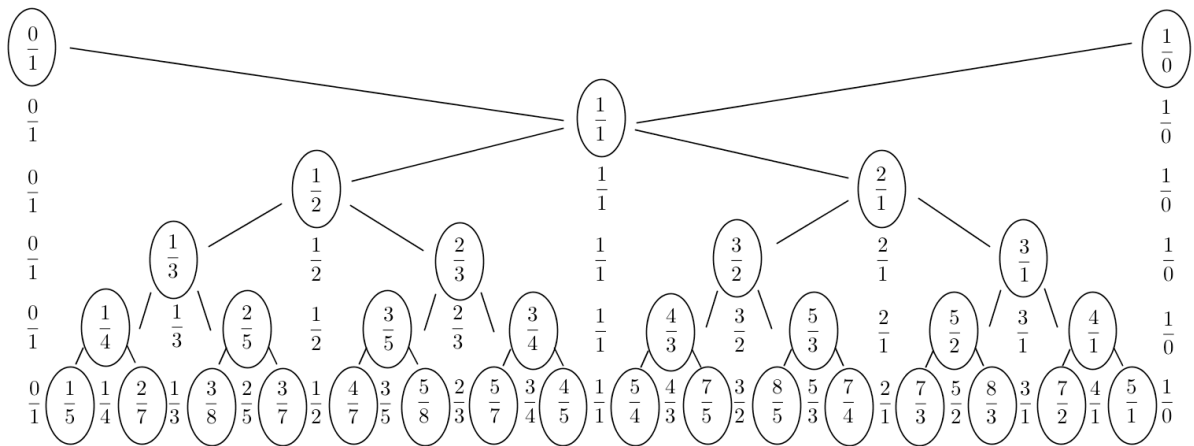


Figura 21

Ignorando todas as frações que não estão destacadas e os termos  $\frac{0}{1}$  e  $\frac{1}{0}$ , obtemos parte da árvore que designaremos adiante por árvore de Stern-Brocot:

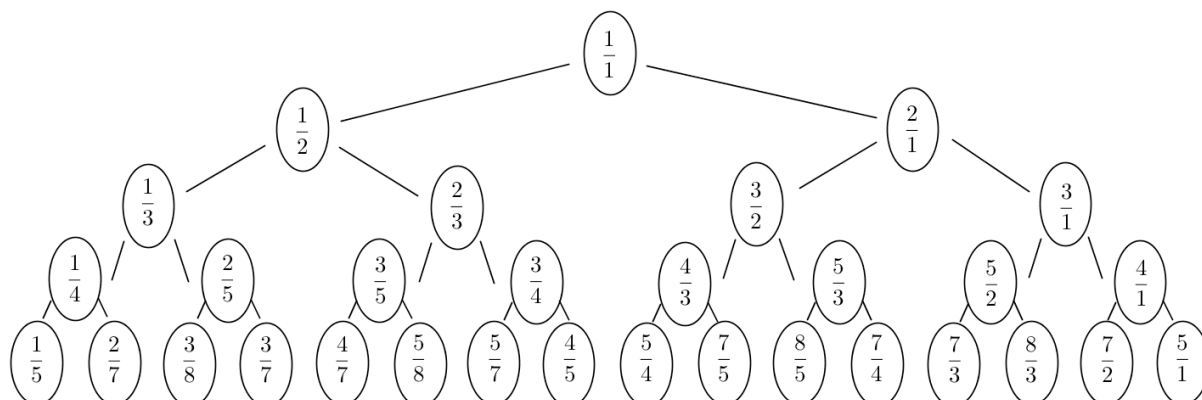


Figura 22: Primeiros níveis da árvore de Stern-Brocot.

- ❖ Reparou que o número de arestas que partem (no sentido descendente) de cada fração é sempre 2?
- ❖ Qual é a estrutura desta árvore?

Esta árvore é um exemplo de uma árvore binária completa, na medida em que tem as seguintes características:

- tem um vértice, neste caso  $\frac{1}{1}$ , designado por raiz, que tem grau 2;
- todos os vértices interiores, exceto a raiz, têm grau 3.

Para facilitar a definição da árvore de Stern-Brocot vamos definir recursivamente uma família de árvores finitas,  $(T_n)_{n \geq 0}$ , onde  $V_n$  designa o conjunto de vértices de  $T_n$ ,  $E_n$  designa o conjunto de arestas de  $T_n$ ,  $V_n \subseteq V_{n+1}$  e  $E_n \subseteq E_{n+1}$ .

A árvore de Stern-Brocot será o “limite” ou, mais concretamente, a união destas árvores.

Temos então,

$$T_0 = (V_0, E_0), \text{ onde } V_0 = SB_0 \setminus SB_{-1} = \left\{ \frac{1}{1} \right\} \text{ e } E_0 = \emptyset;$$

$$T_1 = (V_1, E_1), \text{ onde } V_1 = V_0 \cup (SB_1 \setminus SB_0) = SB_1 \setminus SB_{-1} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1} \right\}$$

e

$$E_1 = E_0 \cup \left\{ \text{arestas de } \alpha \in SB_0 \setminus SB_{-1} \text{ para } \beta \in SB_1 \setminus SB_0 \text{ se } \beta \text{ ocorre em } SB_1 \setminus SB_0 \text{ como mediantes de } \alpha \text{ e de } \alpha' \in SB_{-1} \right\}.$$

Recursivamente,

$$T_{n+1} = (V_{n+1}, E_{n+1}), \text{ onde}$$

$$V_{n+1} = V_n \dot{\cup} (SB_{n+1} \setminus SB_n) = SB_{n+1} \setminus SB_{-1}$$

e

$$E_{n+1} = E_n \dot{\cup} \{ \text{arestas de } \alpha \in SB_n \setminus SB_{n-1} \text{ para } \beta \in SB_{n+1} \setminus SB_n \text{ se } \beta \text{ ocorre em } SB_{n+1} \setminus SB_n \text{ como mediantes de } \alpha \text{ e de } \alpha' \in SB_{n-1} \}.$$

A árvore de Stern-Brocot, designada por  $T = (V, E)$ , é definida por

$$T = \bigcup_{n \geq 0} T_n,$$

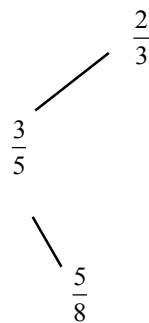
$$\text{ou seja, } V = \bigcup_{n \geq 0} V_n \text{ e } E = \bigcup_{n \geq 0} E_n.$$

**Definição:**

Dizemos que a fração  $\frac{a}{b} \in \mathcal{Q}^+$  tem ordem  $n \geq 0$  se  $\frac{a}{b} \in SB_n \setminus SB_{n-1}$ .

Vimos anteriormente que cada fração em  $T_n$ , de ordem  $n \geq 0$ , é mediante de duas anteriores (eventualmente  $\frac{0}{1}$  e/ou  $\frac{1}{0}$ ). A este propósito, se analisar a figura 21 verifica, por exemplo, que  $\frac{5}{8}$  é a mediante de  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{2}{3}$ . Se analisar as mesmas frações na figura 22, entenderá a razão por que passaremos a designar  $\frac{3}{5}$  por ascendente menor de  $\frac{5}{8}$  e  $\frac{2}{3}$  por ascendente maior de  $\frac{5}{8}$ .

A observação do esquema seguinte pretende facilitar a interpretação desta explicação.

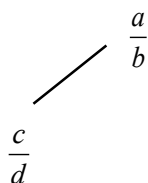


*Definição:*

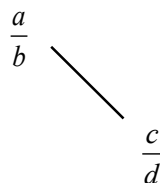
Se existir uma aresta entre duas frações  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$ , supondo que  $\frac{a}{b}$  tem ordem inferior à ordem de  $\frac{c}{d}$ , dizemos que  $\frac{a}{b}$  é progenitor de  $\frac{c}{d}$  e, por sua vez, que  $\frac{c}{d}$  é filho de  $\frac{a}{b}$ .

Particularmente, designaremos  $\frac{c}{d}$  por filho esquerdo se  $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$  ou, caso  $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$ , por filho direito.

Para melhor compreender esta definição observe o esquema seguinte:



$\frac{c}{d}$  é filho esquerdo de  $\frac{a}{b}$



$\frac{c}{d}$  é filho direito de  $\frac{a}{b}$

*Definição:*

Dadas duas frações positivas  $p$  e  $q$ , diz-se que  $q$  é descendente de  $p$  de ordem 1 se  $q$  for filho de  $p$  e para  $k \geq 2$  dizemos que  $q$  é descendente de  $p$  de ordem  $k$  se  $q$  for filho de um descendente de  $p$  de ordem  $k-1$ . Se nesta definição a ordem  $k$  for irrelevante, dizemos simplesmente que  $q$  é descendente de  $p$ . Por outras palavras, relativamente à representação que temos usado para a árvore de Stern-Brocot, dadas duas frações  $p$  e  $q$ ,  $q$  será descendente de  $p$  se existir um caminho descendente entre  $p$  e  $q$ . Dizemos também que  $p$  é ascendente de  $q$  se  $q$  for descendente de  $p$ .

Como foi visto anteriormente,  $\frac{3}{5}$  é a primeira (no sentido ascendente na árvore) fração ascendente de  $\frac{5}{8}$  que é menor que  $\frac{5}{8}$  e  $\frac{2}{3}$  é a primeira (no sentido ascendente na árvore) fração ascendente de  $\frac{5}{8}$  que é maior que  $\frac{5}{8}$ .

No mesmo exemplo,  $\frac{3}{5}$  é progenitor de  $\frac{5}{8}$ . Por sua vez,  $\frac{5}{8}$  é filho de  $\frac{3}{5}$ , mais concretamente, filho direito, uma vez que  $\frac{3}{5} < \frac{5}{8}$ .

Repare ainda que  $\frac{5}{8}$  é a mediana de  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{2}{3}$  e que  $\frac{2}{3}$  é o menor dos ascendentes de  $\frac{5}{8}$  que são maiores do que  $\frac{5}{8}$ , e que  $\frac{3}{5}$  é o maior das ascendentes de  $\frac{5}{8}$  que são inferiores a  $\frac{5}{8}$ .

❖ Dada uma fração, poderemos identificar na árvore de Stern-Brocot quais as frações que lhe deram origem pelo processo de cálculo da mediana? Por exemplo, que frações têm  $\frac{1}{4}$  como fração mediana?

Recorde que da figura 21 para a figura 22, as frações  $\frac{0}{1}$  e  $\frac{1}{0}$  foram omitidas. Assim, dada uma fração positiva  $q$ , se não existir nenhum ascendente maior que  $q$  tomar-se-á a fração  $\frac{1}{0}$ ; se não existir nenhum ascendente menor que  $q$  tomar-se-á a fração  $\frac{0}{1}$ .

Respondendo à questão anterior, a fração  $\frac{1}{4}$  obteve-se como mediana de  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{0}{1}$ . Note-se que o primeiro ascendente maior que  $\frac{1}{4}$  é  $\frac{1}{3}$  e o menor é  $\frac{0}{1}$ .

❖ Será que este procedimento é válido em geral?

A ilustração seguinte pretende ajudar a compreender o que a seguir se apresenta.

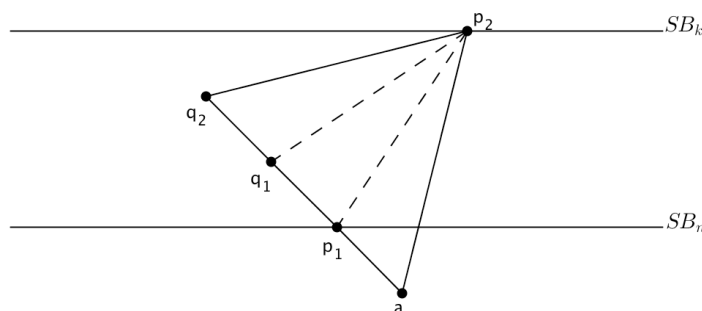



Figura 23

Seja  $a \in SB_{n+1} \setminus SB_n$  a fração mediana de  $p_1$  e  $p_2$  com  $n \geq 0$ . Atendendo à construção recursiva de  $SB_n$ , é fácil de concluir que  $p_1$  e  $p_2$  não poderão ambos ter ordem  $n$ . Por

esta razão, apenas  $p_1$  ou  $p_2$  pertencerá a  $SB_n \setminus SB_{n-1}$ , pertencendo a outra fração a uma ordem anterior.

Consideremos que  $p_1 \in SB_n \setminus SB_{n-1}$  e  $p_2 \in SB_k$ ,  $k < n$  e designemos por  $q_1 \in SB_{n-1} \setminus SB_{n-2}$  o progenitor de  $p_1$ . Temos que ou  $q_1$  é igual a  $p_2$ , e nesse caso temos provado o que queríamos já que em  $SB_n$  não podem existir frações  $x$  com  $p_1 < x < p_2$ , ou então  $q_1$  é menor do que  $p_1$ . A fração  $p_1$  é, obviamente, a mediante de  $q_1$  e  $p_2$ , uma vez que em  $SB_n$  não existem frações  $x$  tais que  $p_1 < x < p_2$ .


Analogamente, se  $q_2$  for o progenitor de  $q_1$  há duas possibilidades: ou  $q_2$  é igual a  $p_2$  (e neste caso fica provado o que queríamos), ou  $q_2$  é menor do que  $q_1$ . Prosseguindo desta forma, uma vez que não podemos ter uma sequência infinita de progenitores  $a > p_1 > q_1 > q_2 > q_3 > \dots$ , nalgum ponto teremos um progenitor  $q_l < q_{l-1}$  e  $q_{l+1} = p_2$ .

 Determine as frações que dão origem a  $\frac{2}{9}$  pelo processo de Stern-Brocot.

☒ Ao resolver esta questão deverá concluir que as frações pretendidas são  $\frac{1}{5}$  e  $\frac{1}{4}$ .

❖ Existirá alguma relação entre as sequências de Farey e a árvore de Stern-Brocot?

❖ Existirá alguma relação entre as frações que se encontram à esquerda e à direita da raiz  $\frac{1}{1}$  da árvore de Stern-Brocot?

 Prove essas relações e use-as para concluir, usando o que já conhece das sequências de Farey, que todos os racionais positivos ocorrem na árvore de Stern-Brocot.

❖ Se refletir por exemplo acerca do que leu no capítulo das sequências de Farey, relembra que todas as frações existentes numa sequência de Farey  $F_n$  estão na forma irredutível.

 Prove que o mesmo se verifica na árvore de Stern-Brocot.

Estas questões têm resposta com base no que já foi abordado no capítulo das Sequências de Farey.



## Capítulo 5: Árvore de Calkin-Wilf

O sistema de numeração que usamos no dia-a-dia, em cálculos elementares, é o sistema decimal.

Cada número inteiro pode ser escrito no sistema decimal usando potências de 10. Por exemplo, o número que é representado no sistema decimal pela sucessão de algarismos 670829 é:

$$\begin{aligned} 670829 &= 6 \times 100000 + 7 \times 10000 + 0 \times 1000 + 8 \times 100 + 2 \times 10 + 9 \\ &= 6 \times 10^5 + 7 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 9 \times 10^0. \end{aligned}$$

A leitura de números é abordada no 1º ciclo do ensino básico. Aí, os alunos deverão ser capazes de ler os números por extenso, por classes e por ordens. Fazendo a leitura por ordens do número anterior temos: nove unidades, duas dezenas, oito centenas, zero milhares, sete dezenas de milhar e seis centenas de milhar.

❖ Mas afinal, que significado tem o sistema de numeração decimal?


O sistema de numeração decimal é, à semelhança de outros sistemas, uma forma de representar números (ver [27]). A possível origem desse sistema está associada à contagem pelos dedos, instinto natural do ser humano. Basicamente, este sistema assenta na organização dos números em grupos de 10. Por exemplo, considerando o número 37, se pensarmos em contar pelos dedos até o atingirmos, vamos contar três vezes todos os dedos e mais sete dedos, ou seja,  $10+10+10+7$ . Por isso se pode ler 3 dezenas e 7 unidades.

No sistema decimal, os algarismos que constituem um número organizam-se por “casas”, ou seja, pela posição que ocupam, do seguinte modo:

... dezenas de milhar    unidades de milhar    centenas    dezenas    unidades

Cada conjunto de três casas forma o que se designa por classe:

...	<u>dezenas de milhar</u>	<u>unidades de milhar</u>	<u>centenas</u>	<u>dezenas</u>	<u>unidades</u>
	<hr/>		<hr/>		
...	classe dos milhares		classe das unidades		

 Escreva o número 3415 usando potências de 10.

☒  $3415 = 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

Um outro sistema de numeração bem conhecido é o sistema binário, por ser utilizado nas calculadoras, computadores e em estruturas que envolvem relações binárias. Este sistema pode ser chamado sistema de base dois, binário ou dual, e utiliza apenas dois algarismos, 0 e 1 (ver [30]).

Por exemplo, cem mil, que na base 10 se representa por 6 algarismos (100 000), na base dois representa-se por 17 algarismos. Aparentemente, o aumento significativo do número de algarismos necessários pode parecer constituir um óbice a um desempenho mais eficaz, o que na realidade não se verifica, visto tratar-se de um sistema de numeração mais simples.

❖ Como deduzir que 100 000 se representa, de facto, por 17 algarismos na base 2?

Como deve saber, para representar um número no sistema binário, este deverá ser escrito como soma de potências de base 2 e expoente inteiro não negativo, sem repetir potências.

Além disso, para representar cem mil podemos afirmar que não serão necessárias potências de 2 superiores a  $2^{16}$ , tendo em conta que  $2^{17}$  ultrapassa, por si só, o valor desejado, uma vez que  $\log_2 10^5 < 17$ .

❖ O que significa esta última desigualdade?

Sabe-se que qualquer número natural  $n$  pode ser enquadrado entre duas potências de 2 consecutivas, com expoente inteiro não negativo:

$$2^{k-1} \leq n < 2^k, \text{ para algum (necessariamente único) } k \geq 1.$$

Se quisermos determinar quantos algarismos devem ser usados para escrever um número  $n$  em base 2, basta determinar o valor  $k$  na expressão acima.


Assim, tomando cada uma das desigualdades,

$$2^{k-1} \leq n \Leftrightarrow k-1 \leq \log_2 n \Leftrightarrow k \leq \log_2 n + 1$$

e

$$n < 2^k \Leftrightarrow k > \log_2 n.$$

Assim, como  $\log_2 n < k \leq \log_2 n + 1$ ,  $k = \lceil \log_2 n + 1 \rceil = \lceil \log_2 n \rceil + 1$ .

 Sabemos, evidentemente, que para se escrever o número  $10^5$  na base 10 são necessários 6 algarismos. Poderemos, no entanto, determinar essa quantidade de algarismos usando a relação anterior?

☒ Neste caso, para determinar o valor que se pretende basta fazer  $\lceil \log_{10} 10^5 \rceil + 1 = 5 + 1 = 6$ .

Na tabela seguinte estão assinaladas as potências de base 2 necessárias para escrever o número 100 000, que temos vindo a referir.

$2^{16}$	$2^{15}$	$2^{14}$	$2^{13}$	$2^{12}$	$2^{11}$	$2^{10}$	$2^9$	$2^8$	$2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$
X	X				X						X		X			

Significa então que  $100\,000 = 2^{16} + 2^{15} + 2^{11} + 2^5 + 2^3$ .

Se na tabela apresentada acima, a todas as potências de 2 que não foram usadas correspondermos o número 0 e a todas as que foram usadas correspondermos o número 1, obtemos o seguinte:

$2^{16}$	$2^{15}$	$2^{14}$	$2^{13}$	$2^{12}$	$2^{11}$	$2^{10}$	$2^9$	$2^8$	$2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0

Assim, o número 100 000, escrito na base 10, escreve-se na forma 11000100000101000 na base 2, com 17 algarismos, conforme se afirmava anteriormente.

❖ Observando a tabela anterior, encontra algum significado para serem usados os algarismos 0 e 1?

Repare que se somar os produtos das entradas de cada coluna, concluirá que  $100\,000 = 1 \times 2^{16} + 1 \times 2^{15} + 1 \times 2^{11} + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^3$ . Note que as parcelas cujo resultado desse produto é zero são omitidas.

Uma outra forma de obtermos a representação binária de um número é a que a seguir se apresenta.

Consideremos, para isso, o número 83, bastante inferior a 100 000, para facilitar a apresentação do procedimento utilizado. Se efetuarmos consecutivas divisões por 2, até obter quociente 0, obtemos o seguinte:

$$\begin{array}{r}
 83 \mid 2 \\
 \hline
 1 \quad 41 \mid 2 \\
 \hline
 1 \quad 20 \mid 2 \\
 \hline
 0 \quad 10 \mid 2 \\
 \hline
 0 \quad 5 \mid 2 \\
 \hline
 1 \quad 2 \mid 2 \\
 \hline
 0 \quad 1 \mid 2 \\
 \hline
 1 \quad 0
 \end{array}$$

- ❖ Que significado terão os sucessivos restos da divisão, assinalados a negrito, tendo em conta o que se pretende determinar?

Aplicando o algoritmo da divisão, ensinado no 1º ciclo do ensino básico,

$$D = d \times q + r, \text{ com } 0 \leq r < q,$$

onde  $D$  representa o dividendo,  $d$  o divisor,  $q$  o quociente e  $r$  o resto, podemos escrever,

$$\begin{aligned}
 83 &= 2 \times 41 + 1 \\
 &= 2 \times (2 \times 20 + 1) + 1 \\
 &= 2^2 \times 20 + 2 \times 1 + 1 \\
 &= 2^2 \times (2 \times 10 + 0) + 2 \times 1 + 1 \\
 &= 2^3 \times 10 + 2^2 \times 0 + 2 \times 1 + 1 \\
 &= 2^3 \times (2 \times 5 + 0) + 2^2 \times 0 + 2 \times 1 + 1 \\
 &= 2^4 \times 5 + 2^3 \times 0 + 2^2 \times 0 + 2 \times 1 + 1 \\
 &= 2^4 \times (2 \times 2 + 1) + 2^3 \times 0 + 2^2 \times 0 + 2 \times 1 + 1 \\
 &= 2^5 \times 2 + 2^4 \times 1 + 2^3 \times 0 + 2^2 \times 0 + 2 \times 1 + 1 \\
 &= 2^5 \times (2 \times 1 + 0) + 2^4 \times 1 + 2^3 \times 0 + 2^2 \times 0 + 2 \times 1 + 1 \\
 &= 2^6 \times 1 + 2^5 \times 0 + 2^4 \times 1 + 2^3 \times 0 + 2^2 \times 0 + 2 \times 1 + 1 \\
 &= 2^6 \times 1 + 2^5 \times 0 + 2^4 \times 1 + 2^3 \times 0 + 2^2 \times 0 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1.
 \end{aligned}$$

- ❖ Compare os restos da divisão anterior com os fatores associados às potências de base 2 da última expressão encontrada. Encontra alguma relação?

Conclui-se, assim, que 1010011 é a representação binária do número 83. Simbolicamente, podemos escrever  $83 = (1010011)_2$ .

 Escreva o número 37 na base 2 utilizando um dos processos apresentados.

☒  $37 = (100011)_2$  porque

$$\begin{aligned}
 37 &= 2 \times 18 + 1 \\
 &= 2 \times (2 \times 9 + 1) + 1 \\
 &= 2^2 \times 9 + 2 \times 1 + 1 \\
 &= 2^2 \times (2 \times 4 + 1) + 2 \times 1 + 1 \\
 &= 2^3 \times 4 + 2^2 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \\
 &= 2^3 \times (2 \times 2 + 0) + 2^2 \times 0 + 2 \times 1 + 1 \\
 &= 2^4 \times 2 + 2^3 \times 0 + 2^2 \times 0 + 2 \times 1 + 1 \\
 &= 2^4 \times (2 \times 1 + 0) + 2^3 \times 0 + 2^2 \times 0 + 2 \times 1 + 1 \\
 &= 2^5 \times 1 + 2^4 \times 0 + 2^3 \times 0 + 2^2 \times 0 + 2 \times 1 + 1 \\
 &= 2^5 \times 1 + 2^4 \times 0 + 2^3 \times 0 + 2^2 \times 0 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1.
 \end{aligned}$$

- ❖ Porque razão terá sido abordada a escrita de números em base binária?

Acerca da forma de enumerar os números racionais, existe uma outra forma que está relacionada com uma determinada sucessão  $b(n)$  com  $n \geq 0$ , em que todos os racionais

se podem escrever na forma  $\frac{b(n)}{b(n+1)}$  para um e um só  $n \geq 0$ .

Os primeiros termos desta sucessão são:

$$1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1, 5, \dots \quad (1)$$

Fazendo os quocientes de termos consecutivos da sucessão, ou seja, dividindo um termo da sucessão pelo seguinte, obtemos a sucessão de números racionais que a seguir se apresenta:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \dots$$

- ❖ O que representará  $b(n)$ ? Que significado terão os números que constituem esta sucessão?

*Definição:*

Dado um número  $n$ ,  $b(n)$  designa o número de formas de escrever  $n$  como soma de potências de base 2 e expoente inteiro não negativo, onde cada potência pode ser usada zero, uma ou duas vezes. Por convenção,  $b(0) = 1$ .

Por exemplo,

$$\begin{aligned} 4 &= 2^0 + 2^0 + 2^1 \\ &= 2^1 + 2^1 \\ &= 2^2 \end{aligned}$$

e, por isso, uma vez que existem apenas três formas de escrever 4 usando, no máximo, cada potência de 2 duas vezes,  $b(4) = 3$ , como consta em (1).

Já no seguinte caso,

$$\begin{aligned} 10 &= 2^0 + 2^0 + 2^1 + 2^1 + 2^2 \\ &= 2^0 + 2^0 + 2^2 + 2^2 \\ &= 2^0 + 2^0 + 2^3 \\ &= 2^1 + 2^2 + 2^2 \\ &= 2^1 + 2^3, \end{aligned}$$

pelo que se conclui que  $b(10) = 5$ .

- ❖ Entende agora o motivo pelo qual abordámos o sistema binário? Este procedimento apenas difere no número de vezes que as potências de 2 podem ser usadas.
- ❖ Existirá, no entanto, outro processo para determinarmos o número de formas de escrever  $n$  como soma de potências de base 2, ou seja, alguma forma de determinarmos os termos da sucessão  $b(n)$  de forma sistemática, que não seja por métodos exaustivos?

*Definição:*

Por uma questão de simplicidade de linguagem, uma decomposição de um natural em potências de base 2 e expoente inteiro não negativo, onde cada potência é usada, no máximo, duas vezes, será designada por decomposição admissível.

Note-se que  $b(n) \geq 1$  para todo o  $n \geq 0$ , já que a representação binária de  $n$  dá origem a uma decomposição admissível de  $n$ .

Arranjar uma forma de determinar  $b(n)$  implicará, como veremos, considerar separadamente os casos  $n$  par e  $n$  ímpar.

Começando por analisar a situação para números pares, determinar  $b(2n)$  é encontrar uma forma de contagem do número de decomposições admissíveis do número par  $2n$ .

O método usado será o método recursivo.

Suponha-se, para o efeito, que

$$2n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + 2^{k_3} + \dots + 2^{k_l} \quad (2)$$

é uma decomposição admissível de  $2n$ .

❖ Poderão algumas das potências representadas acima ter expoente 0?

Tendo em conta que  $2n$  representa um número par, as potências com expoente 0 ou não figuram na decomposição ou são usadas duas vezes. Vamos, por isto, considerar as duas situações.

Supondo, em primeiro lugar, que no desenvolvimento (2) não figuram potências com expoente 0, temos que

$$\begin{aligned} 2n &= 2^{k_1} + 2^{k_2} + 2^{k_3} + \dots + 2^{k_l} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2n}{2} &= \frac{2^{k_1} + 2^{k_2} + 2^{k_3} + \dots + 2^{k_l}}{2} \\ \Leftrightarrow n &= 2^{k_1-1} + 2^{k_2-1} + 2^{k_3-1} + \dots + 2^{k_l-1}. \end{aligned}$$

Uma vez que subtraímos 1 a cada expoente, a propriedade de cada potência aparecer, no máximo, duas vezes é preservada. Além disso, como estamos a supor que  $k_i \geq 1$ , temos que  $k_i - 1 \geq 0$ , podendo concluir que todos os expoentes são inteiros não negativos. Reciprocamente, dada uma decomposição admissível de  $n$ , é possível obter a partir desta uma decomposição admissível de  $2n$ , multiplicando-a por 2. Isso significa somar 1 a cada expoente e por isso a propriedade de cada potência aparecer, no máximo, duas vezes é preservada. Além disso, como estamos também a supor que os expoentes da decomposição de  $n$  são inteiros não negativos, na correspondente decomposição de  $2n$  todos os expoentes são maiores ou iguais a 1. Concluimos assim

que o número de decomposições admissíveis de  $n$  é igual ao número de decomposições admissíveis de  $2n$ , nas quais não figuram potências de expoente 0. Por isso,

$$b(2n) = b(n) + \#\{\text{decomposições de } 2n \text{ em que } 2^0 \text{ é usada}\}.$$

Supondo agora que em (2) aparecem potências com expoente 0, tal como referido anteriormente, estas deverão aparecer duas vezes. Assim, assumindo que  $k_1 = k_2 = 0$ , temos

$$\begin{aligned} 2n &= 1 + 1 + 2^{k_3} + \dots + 2^{k_l} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2n - 2 &= 2^{k_3} + \dots + 2^{k_l} \\ \Leftrightarrow \frac{2n - 2}{2} &= \frac{2^{k_3} + \dots + 2^{k_l}}{2} \\ \Leftrightarrow n - 1 &= 2^{k_3-1} + \dots + 2^{k_l-1}. \end{aligned}$$

À semelhança do que concluímos anteriormente, a propriedade de cada potência aparecer, no máximo, duas vezes é preservada. Além disso, como  $k_i \geq 1$  para qualquer  $i \geq 3$ , todos os expoentes são inteiros não negativos. Reciprocamente, dada uma decomposição admissível de  $n-1$ , podemos obter uma de  $2n$  multiplicando a decomposição de  $n-1$  por 2 e somando de seguida  $2^0 + 2^0$ , garantindo assim que a decomposição de  $2n$  será uma decomposição admissível, em que a potência  $2^0$  ocorre duas vezes.

Estudadas as duas situações referidas anteriormente, temos que

$$b(2n) = b(n) + b(n-1), \text{ para todo o natural } n.$$

Estudando agora a mesma situação para números ímpares, suponhamos que o desenvolvimento

$$2n+1 = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_l} \quad (3)$$

é uma decomposição admissível de  $2n+1$ .

Como  $2n+1$  é um número ímpar, o número de potências com expoente 0 terá que ser ímpar. Porém, atendendo a que cada potência de 2 só poderá aparecer até duas vezes em (3),  $2^0$  terá, necessariamente, que aparecer uma única vez no desenvolvimento (3).



Supondo, assim, que no desenvolvimento anterior  $k_1 = 0$  e que para qualquer  $i > 1$ ,  $k_i \neq 0$ , temos

$$\begin{aligned} 2n+1 &= 2^{k_2} + \dots + 2^{k_1} + 2^0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2n &= 2^{k_2} + \dots + 2^{k_1} \\ \Leftrightarrow \frac{2n}{2} &= 2^{k_2-1} + \dots + 2^{k_1-1} \\ \Leftrightarrow n &= 2^{k_2-1} + \dots + 2^{k_1-1}. \end{aligned}$$

Uma vez que, também aqui, subtraímos 1 a cada expoente, a propriedade de cada potência aparecer, no máximo, duas vezes é preservada e os expoentes usados são não negativos. Reciprocamente, dada uma decomposição admissível de  $n$ , podemos obter uma de  $2n+1$  multiplicando a primeira por 2 e somando de seguida  $2^0$ . O que se obtém continua a ser uma decomposição admissível. Neste caso, o número de decomposições admissíveis de  $n$  é igual ao número de decomposições admissíveis de  $2n+1$ , ou seja,

$$b(2n+1) = b(n), \text{ para todo o inteiro maior ou igual a zero.}$$

 Determine  $b(n)$  para diferentes valores, por si escolhidos.

☒ Os exemplos que usou dificilmente serão os mesmos que abaixo se apresentam!

Vejamos,

$$b(1) = 1,$$

$$b(2) = 2,$$

$$b(3) = b(2 \times 1 + 1) = b(1) = 1,$$

$$b(4) = b(2 \times 2) = b(2) + b(1) = 2 + 1 = 3,$$

$$b(5) = b(2 \times 2 + 1) = b(2) = 2,$$

...

$$b(30) = b(2 \times 15) =$$

$$= b(15) + b(14)$$

$$= b(2 \times 7 + 1) + b(2 \times 7)$$

$$= b(7) + b(7) + b(6)$$

$$= 2b(2 \times 3 + 1) + b(2 \times 3)$$

$$= 2b(3) + b(3) + b(2)$$

$$= 3b(3) + b(2)$$

$$= 3 \times 1 + 2$$

$$= 5,$$

...

$$\begin{aligned}
b(43) &= b(2 \times 21 + 1) = \\
&= b(21) \\
&= b(2 \times 10 + 1) \\
&= b(10) \\
&= b(2 \times 5) \\
&= b(5) + b(4) \\
&= 2 + 3 \\
&= 5.
\end{aligned}$$

A sucessão  $b(n)$  tem ainda as seguintes propriedades, que serão justificadas adiante:

- Quaisquer termos consecutivos de  $b$  são primos entre si, logo cada número racional da forma  $\frac{b(n)}{b(n+1)}$  aparece na forma irredutível, para  $n \geq 0$ .
- Todos os racionais positivos aparecem uma e uma só vez na lista  $\left\{ \frac{b(n)}{b(n+1)} \right\}_{n \geq 0}$ .

Mais adiante retomaremos a análise da sucessão  $b(n)$ , uma vez que esta terá uma relação estreita com a árvore que vamos abordar de seguida.

O nome da referida árvore, Calkin-Wilf, liga os nomes de Neil Calkin e Herbert Wilf (1931-2012), dois reconhecidos matemáticos americanos. Wilf era especialista nas áreas da Combinatória e da Teoria dos Grafos e Calkin na área da Combinatória e Métodos Probabilísticos, particularmente no que respeita à Teoria dos Números. Calkin e Wilf fundaram juntos *The Electronic Journal of Combinatorics*, em 1994 (ver [29]).

Esta árvore foi descoberta anteriormente por Jean Berstel e Aldo de Luca com a designação de árvore de Raney, uma vez que desenvolveram algumas ideias presentes num artigo de George Raney (ver [28] e [29]).

À semelhança da árvore de Stern-Brocot, a árvore de Calkin-Wilf também mostra uma forma de enumerar os números racionais (ver [2] [9] e [26]).

Consideremos que  $\frac{1}{1}$  é a raiz da árvore e que a formação de filhos direitos e esquerdos segue a seguinte regra:

$$\begin{array}{c}
 \frac{a}{b} \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \frac{a}{a+b} \quad \frac{a+b}{b}
 \end{array} \quad (4)$$

Aplicando repetidamente esta regra, pode obter-se o seguinte:

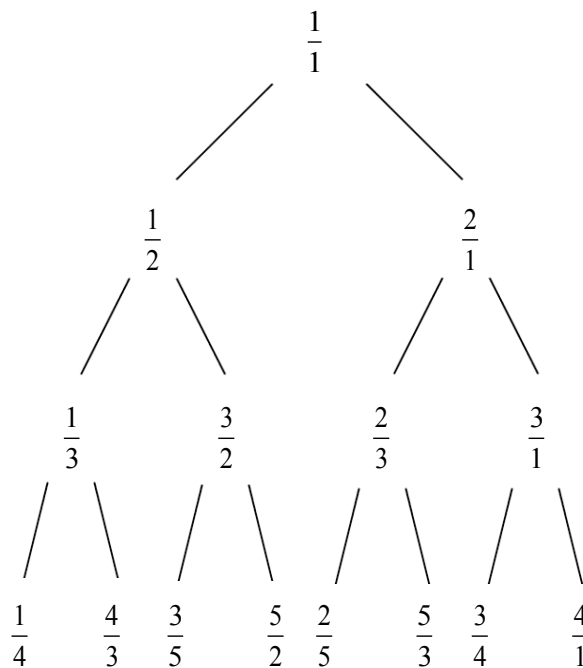


Figura 24: Primeiros níveis da árvore de Calkin-Wilf.

A árvore que se obtém iterando este processo, apresenta as seguintes propriedades:

### Propriedade 1

O numerador e o denominador de cada fração da árvore são primos entre si.

A prova desta afirmação será feita por redução ao absurdo.

Suponhamos, assim, que existe uma fração  $\frac{a}{b}$  cujos numerador e denominador não são primos entre si.

Como a propriedade enunciada é verdadeira para a raiz da árvore, ou seja, para  $\frac{1}{1}$ ,  $\frac{a}{b}$  não é a raiz, logo é filho direito ou esquerdo de algum outro vértice da árvore.

- Se  $\frac{a}{b}$  é um filho esquerdo, o seu progenitor é  $\frac{a}{b-a}$ . Considerando que  $a$  e  $b$  não são primos entre si, então existe um número inteiro maior do que 1 que divide simultaneamente  $a$  e  $b$ , e, por consequência, também divide  $b-a$ . Assim,  $\frac{a}{b-a}$  não estará na forma irredutível.

- Por outro lado, se  $\frac{a}{b}$  é um filho direito, o seu progenitor é  $\frac{a-b}{b}$ . Do mesmo modo, se existe um número inteiro maior do que 1 que divide  $a$  e  $b$ , este também divide  $a-b$  e por isso  $\frac{a-b}{b}$ , também não está na forma irredutível.

Acabámos de mostrar que se  $\frac{a}{b}$  é um vértice interior da árvore que não está na forma irredutível, então qualquer seu antecessor também não está na forma irredutível. A conclusão a que se chega é que a raiz da árvore não está na forma irredutível, o que é um absurdo.

Concluimos, desta forma, que qualquer fração presente na árvore tem o numerador e o denominador primos entre si.

## Propriedade 2

Todos os racionais positivos aparecem nalgum vértice da árvore de Calkin-Wilf.

Suponhamos que existe algum racional que não está na árvore.

De entre todas as frações positivas e irredutíveis que não ocorrem na árvore, consideremos as de denominador mínimo. De entre estas, seja  $\frac{a}{b}$  a que tem menor numerador.

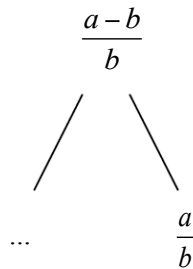
- Como  $\frac{a}{b}$  não ocorre na árvore, em particular não é a raiz da árvore, logo  $a \neq b$ .

- Se  $a > b$  então  $\frac{a-b}{b}$  é uma fração positiva e irredutível, porque  $m.d.c.(a,b)=1$ , por hipótese.

Uma vez que  $\frac{a-b}{b}$  tem o mesmo denominador que  $\frac{a}{b}$  e tem numerador inferior, então

$\frac{a-b}{b}$  ocorre na árvore. Mas então  $\frac{a}{b}$  também ocorre, já que é filho direito de  $\frac{a-b}{b}$ . Tal

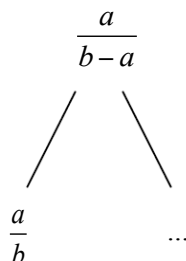
pode ser ilustrado, segundo a regra estabelecida em (4), da seguinte forma:



- Se  $a < b$  então, como  $\frac{a}{b-a}$  é uma fração positiva e irredutível com menor denominador

que  $\frac{a}{b}$ , esta fração ocorre na árvore. Do mesmo modo se pode ilustrar esta situação,

segundo a referida regra (4):



Assim, como  $\frac{a}{b-a}$  aparece na árvore,  $\frac{a}{b}$  também terá que aparecer, porque é filho

esquerdo de  $\frac{a}{b-a}$ .

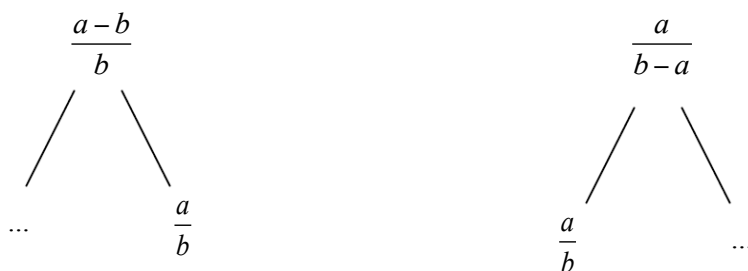
Chegamos assim a um absurdo, já que não pode existir tal fração  $\frac{a}{b}$ .

Conclui-se, desta forma, que todas as frações positivas aparecerão na árvore.

### Propriedade 3

Cada número racional positivo aparece uma só vez nalgum vértice da árvore.

À semelhança do que se ilustrou na propriedade anterior temos que  $\frac{a-b}{b}$  ou  $\frac{a}{b-a}$  são as frações que antecedem  $\frac{a}{b}$  se esta for filho direito ou esquerdo, respetivamente.



Suponhamos que existe alguma fração que ocorre em mais do que um vértice da árvore. De todas essas frações, escolhamos uma, digamos  $\frac{a}{b}$ , com  $a+b$  mínimo.

- Se  $a = b$  então  $\frac{a}{b} = 1$ . Logo,  $\frac{1}{1}$  ocorre alguma vez como filho direito ou esquerdo de outro vértice. A fração antecedente seria, assim,  $\frac{a-b}{b}$  ou  $\frac{a}{b-a}$ , o que é um absurdo pois  $a = b$ .
- Se  $a < b$  então  $\frac{a}{b}$  é filho esquerdo de  $\frac{a}{b-a}$ , o que implica que  $\frac{a}{b-a}$  também ocorra em mais do que um vértice da árvore. No entanto, isto é absurdo porque  $a + (b-a) = b$  é menor do que  $a+b$ .
- Se  $a > b$  então  $\frac{a}{b}$  é filho direito de  $\frac{a-b}{b}$ , o que implica que  $\frac{a-b}{b}$  também ocorra em mais do que um vértice da árvore. No entanto, isto é absurdo porque  $(a-b) + b = a$  é menor do que  $a+b$ .

Como consequência destas propriedades surge o teorema que a seguir se apresenta.

**Teorema:**

Cada número racional positivo aparece uma e uma só vez na árvore de Calkin-Wilf, e na forma irredutível.

- ❖ Que relação existirá, então, entre a anterior sucessão  $b(n)$ , com  $n \geq 0$ , e a árvore de Calkin-Wilf?

Vamos começar por ver que, lendo as frações da árvore de Calkin-Wilf, linha a linha, sucessivamente, de cima para baixo e, dentro de cada linha, da esquerda para a direita, o denominador de cada fração é igual ao numerador da fração seguinte.

Vejamos que esta propriedade se verifica para os primeiros termos:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \dots$$

Prosseguimos por indução, considerando uma fração qualquer da árvore diferente da raiz. Se a fração escolhida é um filho esquerdo, então a fração seguinte será o filho direito do mesmo progenitor pelo que, atendendo à lei de formação, a afirmação anterior é verdadeira. Caso contrário, se a fração escolhida for um filho direito, então o seu denominador é igual ao denominador do seu progenitor, digamos  $\frac{a}{b}$ , e o numerador da fração seguinte é igual ao

numerador do progenitor desta fração, digamos  $\frac{c}{d}$ . Mas como  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  são consecutivas e estão na linha anterior, por hipótese de indução implica que  $b = c$ , o que mostra que o filho direito de  $\frac{a}{b}$  tem denominador igual ao

numerador do filho esquerdo de  $\frac{c}{d}$ . Além disso, pela lei de formação, também se pode observar que os extremos direitos da árvore têm todos denominador 1 e os extremos esquerdos numerador 1, o que mantém verdadeira a referida afirmação quando, fazendo a leitura da forma sugerida, se muda de linha.

Assim, depois de escrevermos uma sequência de racionais lendo as sucessivas linhas da árvore, como descrito acima, essa lista estará na forma

$$\left\{ f(n) / f(n+1) \right\}_{n \geq 0}, \text{ para alguma função } f : \mathbb{Z}_{n \geq 0} \rightarrow \mathbb{N}.$$

De seguida, queremos determinar a ordem dos descendentes de uma fração em função da ordem desta, onde a ordem de  $\frac{f(n)}{f(n+1)}$  é  $n$ .

Convencionemos que a primeira linha da árvore é a linha 1. Como cada progenitor dá origem a dois filhos, que figuram na linha seguinte, significa que a última fração da linha  $k$  tem ordem  $2^k - 2$ .

❖ Sugerimos ao leitor a prova da última afirmação.

Seja  $r_n$ , a fração  $\frac{f(n)}{f(n+1)}$  de ordem  $n$ , onde  $n \geq 0$ . Se esta fração ocorrer na posição  $j$  da linha  $k$ , então  $n = 2^{k-1} - 2 + j$ . O filho esquerdo de  $r_n$  estará na posição  $2(j-1)+1 = 2j-1$  da linha  $k+1$ , logo terá ordem  $2^k - 2 + 2j - 1 = 2^k + 2j - 3 = 2n + 1$ . Desta forma, concluímos que os filho esquerdo e direito de  $r_n$  são, respetivamente,  $r_{2n+1}$  e  $r_{2n+2}$ .

Assim, pela lei de formação da árvore de Calkin-Wilf, temos

$$\begin{array}{ccc} & \frac{f(n)}{f(n+1)} & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \frac{f(n)}{f(n)+f(n+1)} & & \frac{f(n)+f(n+1)}{f(n)} \end{array}$$

que, para todo o  $n \geq 0$

$$\frac{f(2n+1)}{f(2n+2)} = r_{2n+1} = \frac{f(n)}{f(n)+f(n+1)}.$$

Como tanto  $f(2n+1)$  e  $f(2n+2)$  como  $f(n)$  e  $f(n)+f(n+1)$  são primos entre si, conforme foi visto na Propriedade 1, temos  $f(2n+1) = f(n)$  e  $f(2n+2) = f(n)+f(n+1)$ , para todo o  $n \geq 0$ , o que mostra que  $f$  e  $b$  satisfazem a mesma relação de recorrência. Como também  $f(0) = 1 = b(0)$ , resulta que  $f(n) = b(n)$  para todo o  $n \geq 0$ .



A seguir, deixamos à consideração do leitor explorar duas questões.

- ❖ Reparou, por exemplo, que o produto das frações presentes em cada linha é 1 e que em cada linha, se ocorre o racional positivo  $q$  então também ocorre  $\frac{1}{q}$ ? Consegue justificar estas observações?
- ❖ Compare a leitura de cada linha da esquerda para a direita e da direita para a esquerda e justifique o que observou.



Recordando a sucessão  $b(n)$  é possível observar que esta sucessão toma o valor 1 diversas vezes. Para que valores de  $n$  é que  $b(n)=1$ ?

A sequência  $b(n)$ , referida neste capítulo, determina o número de formas de representar  $n$  usando cada potência de 2, no máximo duas vezes.

Recorde que os primeiros termos de  $b(n)$  são:

1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1, 5, ...

e que, por convenção,  $b(0)=1$ .

Podemos observar que  $b(n)=1$  para  $n=0, 1, 3, 7, 15, \dots$

- ❖ Para que outros valores de  $n$  é que se verifica  $b(n)=1$ ?

Como já foi observado, a representação binária de um número é admissível e portanto  $b(n) \geq 1$ , para todo o natural  $n$ . Se  $b(n)=1$  então a representação binária será a única representação admissível. Ora, como  $2^k = 2^{k-1} + 2^{k-1}$ , se na representação binária de  $n$  for usada a potência  $2^k$  e não for usada a potência  $2^{k-1}$ , substituindo a primeira por  $2^{k-1} + 2^{k-1}$  obtemos uma representação admissível de  $n$ , diferente da representação binária, e portanto  $b(n) \geq 2$ . Assim, se  $b(n)=1$  temos duas possibilidades:

- o dígito 1 não ocorre na representação binária de  $n$ , logo  $n=0$ ;
- o dígito 0 não ocorre na representação binária de  $n$ , logo a representação binária de  $n$  é da forma 1111...1.

Em qualquer dos casos acima,  $n$  é da forma  $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$ , para algum  $k \geq 0$ .

Acabámos de mostrar que se  $b(n)=1$  então  $n$  é da forma  $2^k - 1$ , para algum  $k \geq 0$ .

Para verificar que de facto  $b(2^k - 1)=1$ , para todo o  $k \geq 0$ , usamos a relação de recorrência  $b(2n-1)=b(n-1)$ , que foi vista neste capítulo. Temos então,

$$\begin{aligned} b(2^k - 1) &= b(2^{k-1} - 1) \\ &= b(2^{k-2} - 1) \\ &= \dots \\ &= b(2^0 - 1) \\ &= b(0) \\ &= 1, \end{aligned}$$

que também poderá ser provado por indução sobre  $k$ .

Logo, os valores de  $n$  para os quais  $b(n)=1$  são precisamente os da forma  $2^k - 1$ , para algum  $k \geq 0$ .

Repare-se que na árvore de Calkin-Wilf os naturais e os recíprocos dos naturais figuram precisamente nos extremos da árvore. Relacione esta observação com o que acabámos de ver.

- ❖ Conseguirá o leitor descobrir para que valores de  $n$  é que  $b(n)=2$ ?

## Conclusão

Treze anos após a conclusão da minha licenciatura em matemática – ramo educacional – e de me ter dedicado, durante os mesmos, ao ensino da matemática a alunos do terceiro ciclo e do ensino secundário, considerei que era altura propícia para realizar um sonho ainda não concretizado e, por esta razão, inscrevi-me nesta faculdade no curso de Mestrado em Matemática para Professores.

O exercício de estudar e aprofundar conhecimentos é, para mim, deveras importante, uma vez que me valoriza tanto ao nível profissional como pessoal. Do meu ponto de vista, um professor não se pode contentar com os conhecimentos e competências que adquiriu durante a sua formação académica inicial. Ainda que bastante importantes, estas parecem manifestar-se insuficientes *ad eternum* para a prática da sua atividade enquanto docente de matemática. As alterações dos programas nos últimos tempos implicam obrigatoriamente mudança nas práticas pedagógicas adotadas em sala de aula.

A estrutura desta tese contempla temas que, de alguma forma, estão relacionados com os conteúdos do currículo nacional de matemática emanado pelo Ministério da Educação e Ciência, pretende estimular a reflexão dos professores e facultar um conjunto de ferramentas a serem exploradas em clubes ou oficinas de matemática, onde será possível uma aprendizagem, em alguns casos, mais lúdica.

A opção de ter focado o meu estudo nas sequências de Farey fez com que as outras temáticas presentes nesta tese tivessem surgido quase que voluntariamente.

O grande desafio da presente dissertação foi ter desenvolvido a capacidade de explicar, por escrito, de forma simples e clara as temáticas exploradas, uma vez que na minha prática letiva, grande parte das explicações que faço são ao nível da oralidade ou com a ajuda de esquemas. Acresce ainda o facto de me ter permitido aprofundar os meus conhecimentos sobre os temas em causa e desenvolver a capacidade de pesquisa e de análise.

Assim, apraz-me ter atingido os objetivos a que me propus, ainda que considere a possibilidade de, num futuro próximo, adicionar outras atividades a estas propostas e enriquecer este trabalho.

# Bibliografia

- [1] Albert H. Beiler, *Recreations in the theory of numbers: The queen of mathematics entertains*, Dover Publications, 1966, pp. 169-172.
- [2] Neil Calkin & Herbert S. Wilf, *Recounting the rationals*, The American Mathematical Monthly, Vol. 107, Nº. 4, abril 2000, pp. 360-363.
- [3] L. R. Ford, *Fractions*, The American Mathematical Monthly, Vol. 45, Nº. 9, novembro 1938, pp. 586-601.
- [4] R. L. Graham, D. E. Knuth & O. Patashnik, *Concrete mathematics*, 2ª. edição, Addison-Wesley, 1994.
- [5] Samuel A. Lopes, *Métodos Finitos em Matemática: sebenta do Mestrado em Matemática para Professores*, FCUP, 2009.
- [6] António Machiavelo, *Aritmética: as subtilezas dos números naturais*, Treze viagens pelo mundo da matemática, 1ª edição, U.Porto editorial, 2010.
- [7] Helena Mena Matos & Teresa Carrapa, *A Tautócrona, a Evoluta e o Relógio de Pêndulo de Huygens*, Gazeta de matemática, Nº. 173, 2014.
- [8] José Carlos Santos, *Números*, 1ª edição, U. Porto editorial, 2014.
- [9] Katherine E. Stange, *An arborist's guide to the rationals*, arXiv: 1403.2928.
- [10] A. A. Karatsuba & S. M. Voronin, *The Riemann Zeta-Function*, Berlim: Walter de Gruyter, 1992.
- [11] <http://apprendre-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Farey>, consultado em dezembro de 2013.
- [12] [http://wikipedia.qwika.com/en2pt/John\\_Farey,\\_Sr.](http://wikipedia.qwika.com/en2pt/John_Farey,_Sr.), consultado em dezembro de 2013.
- [13] <http://nrich.maths.org/6594>, consultado em janeiro de 2014.
- [14] <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Ford.html>, consultado em janeiro de 2014.
- [15] [http://en.wikipedia.org/wiki/René\\_Descartes](http://en.wikipedia.org/wiki/René_Descartes), consultado em março de 2014.
- [16] <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fractions/fareySB.html#sbfulltree>, consultado em abril de 2014.
- [17] [http://en.wikipedia.org/wiki/Stern-Brocot\\_tree](http://en.wikipedia.org/wiki/Stern-Brocot_tree), consultado em abril de 2014.
- [18] <http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-stern-brocot>, consultado em maio de 2014.
- [19] <http://www.homeschoolmath.net/teaching/rational-numbers-countable.php>, consultado em maio de 2014.
- [20] <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Stern.html>, consultado em maio de 2014.
- [21] [http://en.wikipedia.org/wiki/Achille\\_Brocot](http://en.wikipedia.org/wiki/Achille_Brocot), consultado em maio de 2014.

- [22] <http://cybergi.wordpress.com/2010/05/05/a-base-matematica-dos-mecanismos-steampunk/>, consultado em maio de 2014.
- [23] [http://pt.wikipedia.org/wiki/Moritz\\_Stern](http://pt.wikipedia.org/wiki/Moritz_Stern), consultado em maio de 2014.
- [24] [http://en.wikipedia.org/wiki/Moritz\\_Abraham\\_Stern](http://en.wikipedia.org/wiki/Moritz_Abraham_Stern), consultado em maio de 2014.
- [25] <http://planetmath.org/moritzstern>, consultado em maio de 2014.
- [26] [http://en.wikipedia.org/wiki/Calkin-Wilf\\_tree](http://en.wikipedia.org/wiki/Calkin-Wilf_tree), consultado em junho de 2014.
- [27] <http://marco.uminho.pt/~joao/Computacao2/node4.html>, consultado em junho de 2014.
- [28] <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/~history/Biographies/Wilf.html>, consultado em junho de 2014.
- [29] [http://en.wikipedia.org/wiki/Herbert\\_Wilf](http://en.wikipedia.org/wiki/Herbert_Wilf), consultado em junho de 2014.
- [30] [http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm36/numeracao\\_binaria.htm](http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm36/numeracao_binaria.htm), consultado em julho de 2014.
- [31] [http://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria\\_dos\\_grafos#cite\\_ref-Biggs\\_1-0](http://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_dos_grafos#cite_ref-Biggs_1-0), consultado em agosto de 2014.
- [32] [https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard\\_Euler](https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler), consultado em setembro de 2014.
- [33] <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Euler.html>, consultado em setembro de 2014.
- [34] [http://pt.wikipedia.org/wiki/Sete\\_pontes\\_de\\_Königsberg](http://pt.wikipedia.org/wiki/Sete_pontes_de_Königsberg), consultado em setembro de 2014.
- [35] <http://www.mat.uc.pt/~alma/escolas/pontes/>, consultado em setembro de 2014.
- [36] [http://en.m.wikipedia.org/wiki/Dirichlet\\_series](http://en.m.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_series), consultado em setembro de 2014.
- [37] [http://en.m.wikipedia.org/wiki/Particular\\_values\\_of\\_Riemann\\_zeta\\_function](http://en.m.wikipedia.org/wiki/Particular_values_of_Riemann_zeta_function), consultado em setembro de 2014.